

Глава 2

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ
И ГОМОЛОГИИ

§ 15. Функции Морса и клеточные комплексы

Предположим, что на гладком компактном многообразии M задана функция Морса (т. е. все ее критические точки невырождены). Изучим структуру поверхностей уровня $f_c = \{f(x) = c\}$ и областей меньших значений $M_c = \{f(x) \ll c\}$.

Лемма 1 (М. Морс). Пусть $f(x)$ — гладкая функция на M , x_0 — невырожденная стационарная или критическая точка для f . Можно найти такие локальные координаты y^1, \dots, y^n в окрестности точки x_0 , что в этих координатах функция f записывается в виде: $f(y^1, \dots, y^n) = -(y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$. (Число λ называется индексом критической точки.)

Доказательство. Проведем доказательство сначала при $n = 2$; для больших n рассуждения совершенно аналогичны.

В силу локального характера утверждения леммы, можно считать, что $f(x_1, x_2)$ задана в диске $D_{\frac{r}{2}}(0)$ радиуса $r > 0$, $f(0) = 0$, где 0 — критическая точка для f . Существуют гладкие функции g_1, g_2 такие, что $f = x^1 g_1 + x^2 g_2$; $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$.

В самом деле, имеет место равенство:

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = f(1 \cdot x) - f(0 \cdot x) = f(x).$$

Далее

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} x^\alpha dt = x^\alpha \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} dt = x^\alpha g_\alpha(x),$$

где

$$g_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} dt.$$

Ясно, что $g_\alpha(0) = 0$, так как $\text{grad } f(0) = 0$. Следовательно, существуют гладкие функции $h_{\alpha\beta}(x)$ такие, что $g_\alpha(x) = x^\beta h_{\alpha\beta}(x)$.

Итак: $f(x) = x^\alpha x^\beta h_{\alpha\beta}(x)$, где можно считать, что $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$. Далее: $h(0) = \|h_{\alpha\beta}(0)\| = \left\| \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right\|$. В самом деле:

$$\begin{aligned} g_\alpha(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} dt = x^\beta \int_0^1 \frac{\partial g_\alpha(tx)}{\partial x^\beta} dt = \\ &= x^\beta \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\int_0^1 \frac{\partial f(ttx)}{\partial x^\alpha} dt \right) dt = x^\beta \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f(ttx)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dt dt = h_{\alpha\beta}(x) \cdot x^\beta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$h_{\alpha\beta}(0) = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}.$$

Далее ведем доказательство леммы при $n = 2$. В локальных координатах (x^1, x^2) функция f имеет вид:

$$f = (x^1)^2 h_{11} + 2x^1 x^2 h_{12} + (x^2)^2 h_{22}.$$

Можно считать, что $h_{11}(0) \neq 0$. В самом деле, матрица $\|h_{\alpha\beta}(0)\|$ симметрична и невырождена, а потому линейной заменой координат ее можно привести (в одной точке — 0) к диагональному виду. Так как можно было бы с самого начала считать координаты (x^1, x^2) такими, что $\|h_{\alpha\beta}(0)\|$ диагональна, то можно считать, что $h_{11}(0) \neq 0$. Тогда $h_{11}(x) \neq 0$ и в некоторой открытой окрестности точки 0, и в этой окрестности имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= h_{11} \left((x^1)^2 + 2x^1 x^2 \frac{h_{12}}{h_{11}} + (x^2)^2 \frac{h_{22}}{h_{11}} \right) + (x^2)^2 \left(h_{22} - \frac{h_{12}^2}{h_{11}} \right) = \\ &= h_{11} \left(x^1 + \frac{h_{12}}{h_{11}} x^2 \right)^2 + (x^2)^2 \left(h_{22} - \frac{h_{12}^2}{h_{11}} \right). \end{aligned}$$

Так как $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \neq 0$ в некоторой окрестности точки 0 (матрица $\|h_{\alpha\beta}(0)\|$ невырождена), то, делая замену

$$y^1 = \sqrt{|h_{11}|} \left(x^1 + \frac{h_{12}}{h_{11}} x^2 \right); \quad y^2 = \sqrt{\left| h_{22} - \frac{h_{12}^2}{h_{11}} \right|} x^2,$$

получаем:

$$f(y^1, y^2) = \pm (y^1)^2 \pm y^2)^2.$$

Так как замена координат, очевидно, локально невырождена, то тем самым лемма доказана.

Приведем доказательство леммы Морса в случае произвольного n .

Напомним, что введенная выше матрица $\|h_{\alpha\beta}(0)\|$ симметрична. Далее доказательство будем вести по индукции. Пусть функция f в координатах y^1, y^2, \dots, y^n уже имеет вид:

$$f(y) = \pm (y^1)^2 \pm \dots \pm (y^{k-1})^2 + \sum_{\alpha, \beta \geq k} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta}(y),$$

где функции $P_{\alpha\beta}(y)$ образуют симметричную и невырожденную в точке 0 матрицу. Ясно, что при $k=1$ это предположение индукции выполнено (см. построение матрицы $\|h_{\alpha\beta}\|$, играющей роль матрицы $\|P_{\alpha\beta}\|$ при $k=1$). Перепишем функцию $f(y)$ в следующем виде:

$$f(y) = \pm (y^1)^2 \pm \cdots \pm (y^{k-1})^2 + P_{kk}(y)(y^k)^2 + \sum_{\alpha, \beta > k} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta}(y)$$

$(\alpha \neq \beta \text{ при } \beta = k)$

$(n \times n)$ -матрица $\|P_{\alpha\beta}(y)\|$ изображена на рис. 49. Так как $\|P_{\alpha\beta}\|$ симметрична и невырождена, то существует линейная замена переменных y^1, y^{k+1}, \dots, y^n такая, что в одной точке (в начале координат) матрица $\|P_{\alpha\beta}(0)\|$ приведется к диагональному виду;

$$\|P_{\alpha\beta}\| = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{kk} \\ 0 & \end{matrix}; \quad P_{\alpha\alpha} = \pm 1 \text{ при } 1 < \alpha < k-1$$

Рис. 49.

$$J(z, y) = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Рис. 50.

в частности, можно сразу считать, что координаты y^k, \dots, y^n выбраны именно таким образом и, следовательно, $P_{kk}(0) \neq 0$. Рассмотрим функцию $q(y) = \sqrt{|P_{kk}(y)|}$ и сделаем замену переменных: $(y^i) \rightarrow (z^i)$ по формулам

$$z^i = y^i \text{ при } 1 < i < k-1; k+1 < i < n,$$

$$z^k = q(y) \left(y^k + \sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}(y)}{P_{kk}(y)} \right).$$

Найдем якобиан замены $(y) \rightarrow (z)$ в точке 0 (см. рис. 50). Ясно, что $\frac{\partial z^k}{\partial y^k} \Big|_0 = q(0) = \sqrt{|P_{kk}(0)|} \neq 0$, т. е. $\det J(z, y) = \frac{\partial z^k}{\partial y^k} \neq 0$. По теореме о неявных функциях функции (z^1, \dots, z^n) являются локальными координатами в некоторой достаточно малой окрестности точки 0 (что, впрочем, в силу треугольности матрицы замены координат очевидно). Итак, получаем:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{i<k-1} \pm (z^i)^2 + P_{kk} \frac{(z^k)^2}{q^2(y)} - 2P_{kk} \frac{z^k}{q(y)} \sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} + \\ &+ P_{kk} \left(\sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} \right)^2 + 2 \left(\frac{z^k}{q(y)} - \sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} \right) \sum_{i>k} y^i P_{ik} + \\ &+ \sum_{\alpha, \beta > k+1} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta} = \pm (z^1)^2 \pm \cdots \pm (z^{k-1})^2 + \sum_{\alpha, \beta > k+1} z^\alpha z^\beta P_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Шаг индукции завершен, что и доказывает требуемое утверждение при произвольном n .

З а м е ч а н и е. Доказанная лемма, впрочем, не очень существенна при изучении поверхностей уровня функции $f(x)$ в окрестности критической точки. Заранее ясно, что топология уровней определяется формой d^2f в силу ее невырожденности.

Л е м м а 2. Пусть $f(x)$ — гладкая функция на компактном, замкнутом многообразии M^n и пусть отрезок $[a, b]$ (где $a < b$) не содержит критических значений функции f (т. е. в множестве $f^{-1}[a, b]$ нет критических точек). Тогда многообразие f_a диффеоморфно f_b и многообразие (с краем) M_a диффеоморфно M_b .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу компактности M существует $\varepsilon > 0$ такое, что отрезок $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ также не содержит критических значений функции $f(x)$. Можно считать, что на M задана положительная риманова метрика; тогда рассмотрим векторное поле $\text{grad } f(x) = \mathbf{v}(x)$. На многообразии (с краем) $f^{-1}[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ это поле не имеет особенностей и $\mathbf{v}(x)$ ортогонально к гиперповерхностям уровня $f^{-1}(\alpha)$, $a < \alpha < b$. Рассмотрим интегральные траектории поля $\mathbf{v}(x)$, начинающиеся на $f^{-1}(b)$ и кончающиеся на $f^{-1}(a)$, см. рис. 51.

В силу компактности M , можно осуществить гладкую деформацию поверхности $f^{-1}(b)$ вдоль интегральных траекторий поля $\mathbf{v}(x)$ на поверхность $f^{-1}(a)$. Деформированность $f^{-1}(b)$ и $f^{-1}(a)$ очевидна. Аналогичным приемом устанавливается диффеоморфизм между M_a и M_b , так как полный прообраз $f^{-1}[a, b]$ диффеоморфен $f_a \times I$, где I — отрезок. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим поведение поверхностей уровня около критических точек функции $f(x)$.

Пусть $x_0 \in M^n$ — невырожденная критическая точка для $f(x)$, где $f(x_0) = 0$. Тогда в силу леммы 1 (Морса), в достаточно малой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 можно ввести криволинейные координаты x^1, \dots, x^n такие, что $f(x) = -(x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2$. Мы считаем, что центр 0 окрестности $U(x_0)$ помещен в x_0 и $f(0) = 0$. Рассмотрим три гиперповерхности: $f_0, f_\varepsilon, f_{-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Они задаются уравнениями (в области U)

$$(-x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2 = \begin{cases} 0 \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{cases}$$

Здесь λ — индекс критической точки. Ясно, что в координатах (x^1, \dots, x^n) поверхность f_0 является конусом с вершиной в 0, а обе поверхности: $f_{\pm\varepsilon}$ — гиперболондами (см. рис. 52).

Лемма 3. В том случае, когда $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] = M_{+\varepsilon} \setminus M_{-\varepsilon}$ содержит только одну критическую точку индекса λ , многообразие $M_{+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса, получающегося из $M_{-\varepsilon}$ путем приклейки к $M_{-\varepsilon}$ одной клетки σ^{λ} (размерности λ , где λ — индекс критической точки x_0) к границе $f_{-\varepsilon} = \partial M_{-\varepsilon}$.

Доказательство. Мы построим деформацию $\phi_t: M_{+\varepsilon} \rightarrow M_{+\varepsilon}$, где $\phi_0 = 1$, и $\phi_1: M_{+\varepsilon} \rightarrow M_{-\varepsilon} \cup \sigma^{\lambda}$, тождественную на $M_{-\varepsilon}$; существование такой деформации доказывает лемму.

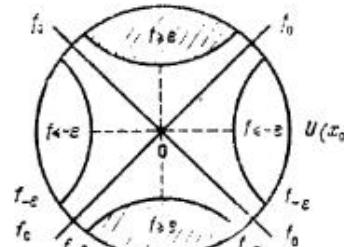


Рис. 52.

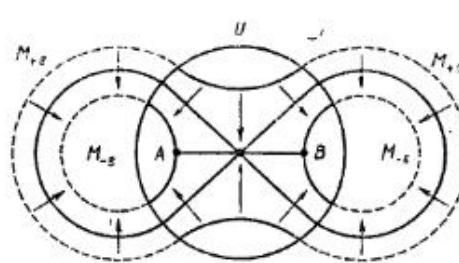


Рис. 53.

Рассмотрим векторное поле $v(x) = -\text{grad } f(x)$ и в качестве ϕ_t рассмотрим деформацию точек x вне $M_{-\varepsilon}$ и вне окрестности U вдоль интегральных траекторий поля $v(x)$. В окрестности U в качестве ϕ_t рассмотрим деформацию, показанную на рис. 53. Здесь отрезок AB условно изображает диск $D^{\lambda}(x^1, \dots, x^{\lambda})$, граница которого (сфера S^{n-1}) гладко вложена в край f_{-e} области M_{-e} (на рисунке $\lambda = 1$ и граница — сфера S^0 есть пара точек A и B). Результат деформации показан на рис. 54. Лемма доказана.

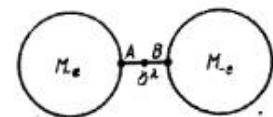


Рис. 54.

размерности λ , где $\{P_{\lambda}\}$ — критические точки некоторой функции Морса на M .

Доказательство. Рассмотрим на M функцию Морса, где на каждом критическом уровне f находится ровно одна критическая точка. Таких функций достаточно много (см. [1], ч. II, § 10). Таким образом, теорема следует из предыдущих лемм и теоремы 5 из § 10 ч. II книги [1].

В ряде случаев дополнительные аналитические свойства функции f накладывают ограничения на индексы критических точек.

Задача 1. Если $f = \text{Re } F(z^1, \dots, z^n)$ — вещественная часть комплексно-аналитической функции в \mathbb{C}^n , то в любой невырожденной критической точке $(z_0^1, \dots, z_0^n) = z_0$ индекс равен n .

Задача 2. Если f — гармоническая функция в \mathbb{R}^n , то индекс невырожденной критической точки не может быть равен 0 или n (принцип максимума).

На компактном многообразии, однако, не бывает комплексно-аналитических и гармонических функций. Укажем одно топологическое применение результата задачи 1: пусть M^{2n} — компактное комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}P^N = \mathbb{C}^N \cup \mathbb{C}P_{\infty}^{N-1}$. Тогда «конечная часть» V многообразия M^{2n} лежит в \mathbb{C}^N . Пересечение $W = \mathbb{C}P_{\infty}^{N-1} \cap M^{2n}$ есть «гиперплоское сечение». Вещественная часть одной из комплексных координат в \mathbb{C}^N дает функцию Морса f на конечной части V многообразия M^{2n} . Все критические точки для f имеют индекс n . Отсюда и из теоремы легко извлечь, что многообразие M^{2n} гомотопически эквивалентно клеточному комплексу $[W \cup \sigma^1 \cup \dots \cup \sigma^k] \cup \sigma^{2n}$, где k — число критических точек функции f в конечной части $V \subset \mathbb{C}^N$. (Докажите аккуратно.) Отсюда следуют равенства:

$$\pi_i(W) = \pi_i(M^{2n}), \quad i < n - 1,$$

$$H_i(W) = H_i(M^{2n}), \quad i < n - 1 \text{ или } n < i < 2n.$$

Вложение $H_{n-1}(W) \rightarrow H_{n-1}(M^{2n})$ есть гомоморфизм на (эпиморфизм).

§ 16. Неравенства Морса

Существует тесная связь между числом стационарных (критических) точек функций $f(x)$ на гладком замкнутом многообразии M^n и топологическими инвариантами многообразия — группами гомологий, эйлеровой характеристикой и др.

В § 15 ч. II книги [1] устанавливалась теорема о том, что число $\sum_{\lambda > 0} (-1)^{\lambda} \mu_{\lambda}(f)$ не зависит от функции Морса f на M^n и совпадает с эйлеровой характеристикой. Здесь $\mu_{\lambda}(f)$ — число критических точек индекса λ для f . Используя результаты § 15, мы получим также следующее утверждение:

Теорема 1. Если $b_k(M^n)$ — ранги групп гомологий многообразия M^n (с любым полем коэффициентов), то имеют место неравенства (Морса) для любой функции (Морса) f на M^n (т. е. имеющей лишь невырожденные критические точки):

$$\mu_{\lambda}(f) \geq b_{\lambda}(M^n)$$

для всех $\lambda = 0, 1, \dots, n$.

Доказательство. Согласно теореме 15.1 этой главы, функция f порождает на многообразии M^n структуру клеточного пространства. Это означает, что многообразие M^n гомотопически эквивалентно клеточному пространству K , получаемому последовательным приклеиванием клеток $K_{i+1} = K_i \cup \sigma^i$, причем сум-

марное число клеток данной размерности λ точно равно числу $\mu_\lambda(f)$ критических точек f индекса λ . Как уже доказывалось в § 4 (см. теорему 4.1), такое клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному комплексу \tilde{K} с числом клеток $\mu_\lambda(f)$ размерности λ . Тем самым \tilde{K} гомотопически эквивалентно M^n и $H_q(\tilde{K}) = H_q(M^n)$ для всех q и всех коэффициентов G . Так как ранг группы гомологий $H_\lambda(\tilde{K})$ всегда не более, чем число клеток размерности λ , то теорема доказана.

Эта теорема однако, не дает полного набора связей между числами $\mu_\lambda(f)$, идентифицируемыми просто с числами клеток комплекса $\tilde{K} \sim M^n$, и числами Бетти $b_\lambda(M^n) = (\text{ранг } H_\lambda(M^n))$. Мы знаем еще одно соотношение (см. § 2)

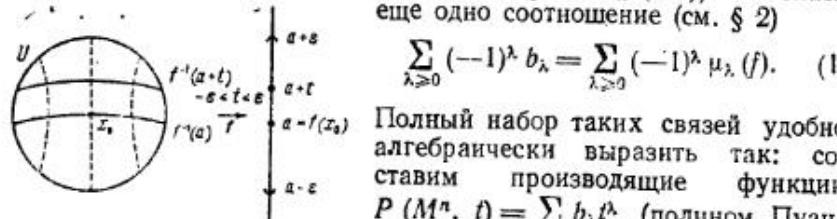


Рис. 55.

функции f , определяемый фактически для любого клеточного комплекса \tilde{K} , где μ_λ — число клеток размерности λ . Тогда из (1) следует, полагая $t = -1$, что разность $Q - P$ делится на $(1 + t)$. Оказывается, отношение $(Q - P)/1 + t$ имеет неотрицательные (целые) коэффициенты. Доказательство будет дано ниже в более общем виде. Удобно также обобщить неравенства Морса на функции с вырожденными критическими точками.

Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция.

Определение 1. Точка $x_0 \in M$ называется *топологической регулярной точкой* для функции $f(x)$, если существует открытая окрестность $U = U(x_0)$, гомеоморфная прямому произведению (см. рис. 55) поверхности уровня на отрезок $[f^{-1}(a)] \times I [-\varepsilon, \varepsilon]$ (где $a = f(x_0)$). При этом требуется «послойность» этого гомеоморфизма, чтобы поверхности $(f^{-1}(a), t)$ совпадали с поверхностями уровня $f^{-1}(a + t)$ в окрестности U .

Определение 2. Точка $x_0 \in M$ называется *бифуркационной точкой* (точкой бифуркации) для функции f , если x_0 не является топологически регулярной точкой.

Рассмотрим примеры. Если $x_0 \in M$ — невырожденная критическая точка функции Морса $f(x)$ на M , то, очевидно, x_0 — бифуркационная точка (см. рис. 56).

Однако вырожденная критическая точка x_0 гладкой функции f не всегда является бифуркационной точкой.

Пример. Рассмотрим $M = \mathbb{R}^1(x)$, $f(x) = x^3$, $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^1$. Тогда x_0 — вырожденная критическая точка для f , однако, в то же время, x_0 — топологически регулярная (не бифуркационная) точка для f (см. рис. 57).

Пусть M^n — гладкое компактное замкнутое многообразие и гладкая функция $f(x)$ допустима, т. е. имеет конечное число бифуркационных точек (например, f — функция Морса на M).

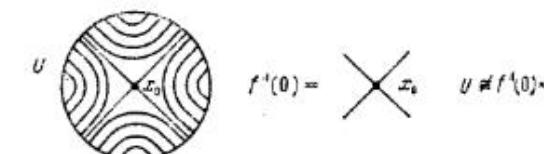


Рис. 56.

Пусть c_1, c_2, \dots, c_N ($N < \infty$) — критические значения для функции f (т. е. $f^{-1}(c_\alpha)$ содержит по крайней мере одну бифуркационную точку). Так как f имеет только конечное число бифуркационных точек, то все они — изолированны. Пусть $\{x\}_\alpha$ множество бифуркационных точек на уровне $\{f(x) = c_\alpha\}$. Рассмотрим $M_{c_\alpha} = \{f(x) < c_\alpha\}$. Относительные группы гомологий $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ представляют собой важнейшие инварианты бифуркационных точек функции f . (Под группой $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ можно понимать, в силу изолированности точек $\{x\}_\alpha$, группу $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus U\{x\}_\alpha)$, где $U\{x\}_\alpha$ — набор достаточно малых открытых окрестностей точек $\{x\}_\alpha$).

Определение 3. Полиномом Пуанкаре функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ назовем полином

$$Q(M, f, t) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=0}^n b_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha) t^k,$$

где $b_k(X, Y) = \dim H_k(X, Y)$.

Теорема 2. Пусть $P(M, t)$ и $Q(M, f, t)$ — введенные выше полиномы Пуанкаре. Тогда разность $Q - P$ делится на $1 + t$, и отношение $(Q - P)/1 + t$ имеет неотрицательные целые коэффициенты.

Лемма 1. Пусть $a < b$ — два такие числа из области значений функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$, что на отрезке $[a, b]$ нет критических значений f . Тогда M_a стягивается к M_b , и $H_*(M_a, M_b) = 0$.

Доказательство леммы было дано в § 15 для функций Морса. Общее доказательство мы опускаем.

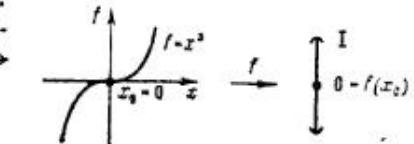


Рис. 57.

Лемма 2. Имеет место равенство

$$b_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha) = b_k(M_{c_{\alpha+\varepsilon}}, M_{c_{\alpha-\varepsilon}}).$$

для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что изоморфны сами группы $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ и $H_k(M_{c_{\alpha+\varepsilon}}, M_{c_{\alpha-\varepsilon}})$. Это последнее утверждение следует из определения группы $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ и из предыдущей леммы. Рассмотрим теперь три полинома типа Пуанкаре специального вида: $P(M_a) = \sum_k b_k(M_a) t^k$; $P(M_b, M_a) = \sum_k b_k(M_b, M_a) t^k$, где $a < b$ (т. е. $M_b \supset M_a$); $P(\text{Im } \partial) = \sum_k \dim(\text{Im } \partial_{k+1}) t^k$, где оператор $\partial_{k+1}: H_{k+1}(M_b, M_a) \rightarrow H_k(M_a)$ является граничным оператором в точной последовательности пары (M_b, M_a) — см. § 5.

Лемма 3. Имеет место равенство

$$P(M_b, M_a) - \{P(M_b) - P(M_a)\} = (1 + t) P(\text{Im } \partial).$$

Доказательство. Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары (M_b, M_a) :

$$H_{k+1}(M_b, M_a) \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(M_a) \xrightarrow{i} H_k(M_b) \xrightarrow{j} H_k(M_b, M_a) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(M_a).$$

Из точности последовательности следует следующая система соотношений:

$$\begin{aligned} b_k(M_b, M_a) &= \dim(\text{Im } j) + \dim(\text{Im } (\partial_k)); \\ \dim(\text{Im } j) &= b_k(M_b) - \dim(\text{Im } i) = \\ &= b_k(M_b) - \{b_k(M_a) - \dim(\text{Im } (\partial_{k+1}))\} = \\ &= \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\} + \dim(\text{Im } (\partial_{k+1})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k(M_b, M_a) - \dim(\text{Im } j) &= b_k(M_b, M_a) - \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\} - \\ &- \dim(\text{Im } (\partial_{k+1})) = R_k - \dim(\text{Im } (\partial_{k+1})) = \dim(\text{Im } (\partial_k)), \end{aligned}$$

где $R_k = b_k(M_b, M_a) - \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\}$.

Итак: $R_k = \dim(\text{Im } (\partial_{k+1})) + \dim(\text{Im } (\partial_k))$,

$$t^k R_k = t^k \dim(\text{Im } (\partial_{k+1})) + t^{k-1} \dim(\text{Im } (\partial_k)),$$

т. е. $\sum_k t^k R_k = (1 + t) P(\text{Im } \partial)$, что и доказывает лемму.

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим все критические значения c_1, c_2, \dots, c_N ($N < \infty$) для функции $f(x)$ (т. е. такие, что $f^{-1}(c_i)$ имеется хотя бы одна точка бифуркации функции f). Рассмотрим далее числа $a_0, a_1, \dots, a_N, a_{N+1}$ такие, что $a_0 < c_1, a_i < c_{i+1} < a_{i+1}; c_N < a_{N+1}$ (т. е. некритические значения $\{a_i\}$ разделяют критические значения $\{c_i\}$; см. рис. 58).

Из предыдущих лемм получаем:

$$P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) - \{P(M_{a_{i+1}}) - P(M_{a_i})\} = (1 + t) P(\text{Im } \partial)_i.$$

Суммируя эти равенства по i от 0 до $N + 1$, очевидно, получаем:

$$Q(M, t) - P(M_{a_{N+1}}) + P(M_{a_0}) = (1 + t) K(t),$$

где полином $K(t)$ имеет неотрицательные коэффициенты. При этом мы воспользовались тем фактом, что:

$$P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) = P(M_{c_i}, M_{c_i} \setminus \{x\}_i)$$

(это следует из предыдущих лемм). Заметим теперь, что $P(M_{a_{N+1}}) \equiv P(M)$, так как a_{N+1} можно считать настолько большим, что $a_{N+1} > \max_{x \in M} f(x)$, а поэтому $M_{a_{N+1}} = M$; далее:

$P(M_{a_0}) = 0$, так как a_0 можно считать выбранным так, что $a_0 < \min_{x \in M} f(x)$,

т. е. $M_{a_0} = \emptyset$, а в определении полинома Пуанкаре суммирование по k начиналось с $k = 0$. Итак, окончательно, $Q(M, t) - P(M) = (1 + t) K(t)$, что и доказывает теорему.

Теперь рассмотрим следствия из этой теоремы. Пусть в качестве группы коэффициентов G взята группа \mathbb{R} вещественных чисел. Тогда числа $b_k = \text{ранг } (H_k)$ называются числами Бетти пространства M . Пусть теперь f — допустимая гладкая функция на многообразии M ; запишем полином Пуанкаре для $f(x)$ в виде $Q(M, f) = \sum_{k \geq 0} \mu_k t^k$, а полином Пуанкаре для M в виде $P(M) = \sum_{k \geq 0} b_k t^k$. Числа μ_k будем называть «числами Морса» гладкой функции f ; (особенно наглядная интерпретация этих чисел возникает в том случае, когда f — функция Морса на M). Тогда, в силу доказанной выше теоремы, получаем:

$$Q(M, f) - P(M) = \sum_{(k)} (\mu_k - b_k) t^k = (1 + t) K(t).$$

Отсюда получаем, что полином $\sum_{(k)} (\mu_k - b_k) t^k$ имеет неотрицательные коэффициенты, т. е. $\mu_k \geq b_k$. Таким образом, числа Бетти b_k многообразия M оценивают снизу числа Морса μ_k . Далее, $\sum_{(k)} \mu_k t^k = \sum_{(k)} b_k t^k + (1 + t) K(t)$; при $t = -1$ получаем $\sum_{(k)} (-1)^k \mu_k = \sum_{(k)} (-1)^k b_k$, где справа стоит эйлерова характеристика многообразия M (альтернированная сумма чисел Бетти): $\chi(M) =$

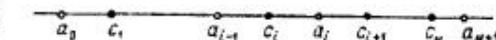


Рис. 58.

$= \sum_k (-1)^k b_k$. Таким образом, альтернированная сумма чисел Морса для произвольной допустимой функции f на M оказывается гомотопическим инвариантом многообразия M (в частности, она одна и та же для произвольной гладкой функции f).

Далее, разложим $(1+t)^{-1}$ в ряд по t :

$$(1+t)^{-1} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha} t^{\alpha},$$

тогда

$$\left(\sum_k (\mu_k - b_k) t^k \right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha} t^{\alpha} > 0,$$

т. е. ряд слева имеет своими коэффициентами (после приведения подобных членов) неотрицательные числа. Отсюда, фиксируя какое-нибудь λ , получаем систему следующих неравенств:

$$(\mu_0 - b_0)(-1)^{\lambda} + (\mu_1 - b_1)(-1)^{\lambda-1} + \\ + (\mu_2 - b_2)(-1)^{\lambda-2} + \dots + (\mu_{\lambda} - b_{\lambda}) \geq 0,$$

т. е.

$$\mu_{\lambda} - \mu_{\lambda-1} + \mu_{\lambda-2} - \dots \pm \mu_0 \geq b_{\lambda} - b_{\lambda-1} + b_{\lambda-2} - \dots \pm b_0.$$

Пусть теперь $f(x)$ — функция Морса на компактном многообразии M . В этом случае числа $\{\mu_k\}$ приобретают особенно прозрачный геометрический смысл. Пусть x_0 — критическая невырожденная (a , следовательно, и бифуркационная) точка для функции $f(x)$ (пусть $(\text{индекс } x_0) = \lambda$). Найдем размерности групп $H_*(M_c, M_c \setminus (x_0)) = H_*(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon})$, где $\epsilon > 0$ достаточно мало, $c = f(x_0)$ — критическое значение; кроме того, пусть x_0 — единственная критическая точка на критическом уровне $f^{-1}(c)$.

Так как для пары клеточных комплексов (X, Y) (где Y — подкомплекс комплекса X) выполнено тождество $H_*(X, Y) \cong H_*(X/Y, *)$, то $H_*(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon}) \cong H_*(M_{c+\epsilon}/M_{c-\epsilon}, *)$. В силу изученной ранее гомотопической эквивалентности $M_{c+\epsilon} \sim M_{c-\epsilon} \cup \sigma^{\lambda}$ (где σ^{λ} — клетка размерности λ), получаем, что $H_*(M_{c+\epsilon}/M_{c-\epsilon}, *) \cong H_*(\sigma^{\lambda}/\partial\sigma^{\lambda}, *) \cong H_*(S^{\lambda}, *)$, где $\sigma^{\lambda}/\partial\sigma^{\lambda} = S^{\lambda}$ — сфера размерности λ . Итак,

$$H_k(M_c, M_c \setminus (x_0)) \cong H_k(S^{\lambda}, *) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = \lambda, \\ 0, & \text{если } k \neq \lambda. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько поучительных примеров, когда x_0 — вырожденная критическая точка для $f(x)$. Пусть, например, $f(x, y) = \operatorname{Re}(z^n)$, где $z = x + iy$. На рис. 59 показано поведение уровней f . Таким образом, $M_{c+\epsilon}/M_{c-\epsilon} \cong S^1 \vee S^1$.

Как мы уже демонстрировали ранее, вырожденные критические точки можно, путем малых возмущений функции f , превращать в объединение невырожденных критических точек. В разоб-

ранном примере точка 0 для $\operatorname{Re}(z^n)$ распадается в объединение $(n-1)$ невырожденных особенностей (см. подробности выше). Это наблюдение является отражением общего утверждения: полином $Q(M, f)$ не меняется при достаточно малом возмущении

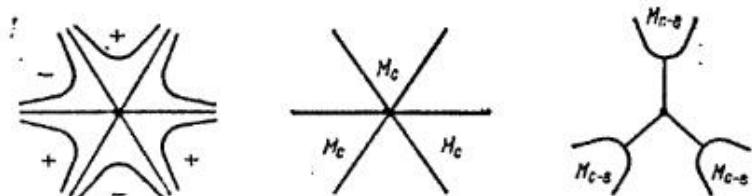


Рис. 59.

функции f . В самом деле, $Q(M, f)$ выражен в терминах групп относительных гомологий $H_*(M_{c+e}, M_{c-e})$, которые, очевидно, не меняются при достаточно малом возмущении функции f . Таким образом, полином $Q(M, f)$ сообщает нам, какое количество невырожденных критических точек каждого индекса λ появляется при распаде вырожденных особенностей функции f (при ее достаточно малом возмущении).

Рассмотрим в заключение еще один пример вырожденной особенности f . Пусть $f(x, y, z) = x^3 - 3x(y^2 + z^2)$.

Представляем читателю убедиться, используя рис. 60, что для этого случая $M_{c+e}/M_{c-e} \cong S^1 \vee S^1$, и вычислить гомологии $H_*(M_{c+e}, M_{c-e})$.

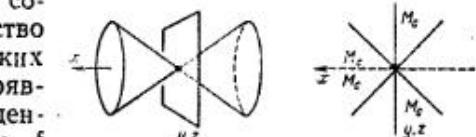


Рис. 60.

§ 17. Правильная функция Морса — Смейла. Ручки. Поверхности

Можно доказать, что на любом компактном гладком связном замкнутом многообразии всегда существует функция Морса, имеющая только один минимум и только один максимум.

Например, для двумерных ориентируемых многообразий M_g^2 такую функцию можно обнаружить среди функций высоты для «хороших» вложений поверхности в \mathbb{R}^3 (см. рис. 61).

Можно показать, что на многообразии всегда существуют функции Морса, у которых критические значения упорядочены относительно индексов, т. е. $f(x_{\lambda}) = f(x_{\mu})$, где $\lambda = \mu$ и $f(x_{\lambda}) > f(x_{\mu})$, где $\lambda > \mu$, λ, μ — индексы точек x_{λ} и x_{μ} соответственно. Эти функции иногда называют «правильными» функциями (или функциями Смейла). Такие функции Морса уже не будут всюду плотны

в пространстве всех гладких функций на M в отличие от общих функций Морса.

Теорема 1. На любом компактном гладком замкнутом многообразии всегда существует правильная функция Морса, имеющая ровно одну точку максимума (точка индекса $\lambda = n = \dim M$) и ровно одну точку минимума (точка индекса 0).

Если теперь, согласно теореме из § 15, восстановить по правильной функции Морса клеточное разбиение M^n , то на каждом

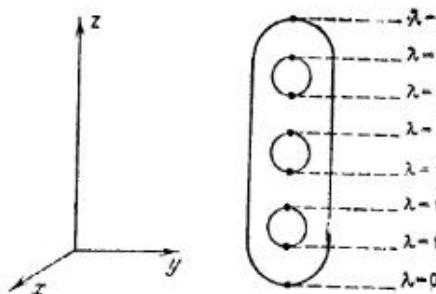


Рис. 61.

шаге будут приклеиваться клетки размерности большей, чем размерность предыдущих клеток.

Доказательство теоремы. Введем полезное вспомогательное понятие: градиентно-подобное поле для гладкой функции $f(x)$ на M^n . Чрез $\xi(f)$ будем обозначать производную функции f вдоль поля ξ .

Определение 1. Гладкое векторное поле ξ на M называется градиентно-подобным, если: 1) $\xi(f) \neq 0$ на множестве $M \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$, где $\{x_i\}$ критические точки для функции Морса f ; 2) для любой точки x_i существует открытая окрестность $U(x_i)$ такая, что в любой системе координат, в ко-

поле ξ имеет вид

$$f(x)|_{U(x_i)} = f(x_i) - \sum_{k=1}^{\lambda} (x^k)^2 + \sum_{k=\lambda+1}^n (x^k)^2,$$

$$\xi(x) = (-x^1, \dots, -x^\lambda; x^{\lambda+1}, \dots, x^n).$$

Ясно, что для любой функции Морса f на M существуют такие поля ξ (например, $\xi = \text{grad } f$ относительно какой-нибудь римановой метрики на M).

Пусть $x_i \in M$ — критическая точка для f , (индекс x_i) = λ и ξ — градиентно-подобное поле для f . Рассмотрим так называемую сепаратрисную диаграмму точки x_i , т. е. совокупность всех интегральных траекторий поля ξ , входящих или выходящих из точки x_i . Тогда в окрестности $U(x_i)$ эта диаграмма имеет вид, показанный на рис. 62.

Входящие траектории заполняют диск $D^\lambda(x^1, \dots, x^\lambda)$; выходящие — диск $D^{n-\lambda}(x^{\lambda+1}, \dots, x^n)$.

Рассмотрим две сферы: $S^{\lambda-1} = D^\lambda \cap \{f(x) = f(x_i) - \varepsilon\}$; $S^{n-\lambda-1} = D^{n-\lambda} \cap \{f(x) = f(x_i) + \varepsilon\}$ для достаточно малого ε . Можно считать, что $S^{\lambda-1} = \partial D^\lambda$, $S^{n-\lambda-1} = \partial D^{n-\lambda}$ в окрестности $U(x_i)$; см. рис. 63.

Рассмотрим «раздувание» дисков $D^\lambda(x_i)$ и $D^{n-\lambda}(x_i)$ вдоль интегральных траекторий поля ξ ; тогда сферы $S^{\lambda-1}(x_i)$ и $S^{n-\lambda-1}(x_i)$ также будут каким-то образом гладко деформироваться, двигаясь вдоль траекторий поля ξ без самопересечения до тех пор, пока они не встретят какую-нибудь другую критическую точку x_j . (Ясно, что траектории поля ξ могут пересекаться только в критических точках функции f .)

Лемма 1. Пусть в слое $M_{y'} \setminus M_a = f^{-1}[a', b']$ есть только две критические точки x_0 и y_0 функции f , причем $a' < a = f(x_0) < f(y_0) = b < b'$; пусть ξ — градиентно-подобное поле для f . Предположим, что в слое $D^{n-\lambda}(x_0) \cap D^{\lambda'}(y_0) = \emptyset$ (здесь $\lambda = \text{ind}(x_0)$; $\lambda' = \text{ind}(y_0)$). Тогда на многообразии M^n существует новая функция Морса g такая, что $f = g$ вне $f^{-1}[a', b']$, при этом g имеет те же критические точки на M , что и функция f ; поле ξ является градиентно-подобным и для функции g ; $g(x_0) > g(y_0)$; $g = f + \text{const}$ в окрестностях $U(x_0)$, $U(y_0)$.

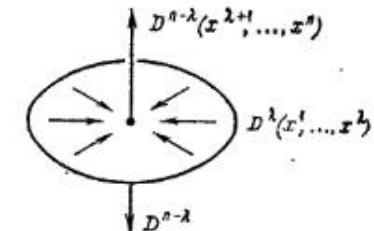


Рис. 62.

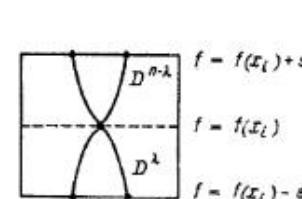


Рис. 63.

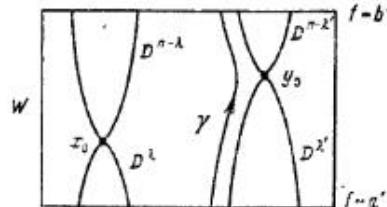


Рис. 64.

Доказательство. Из условий леммы вытекает, что в слое $f^{-1}[a', b']$ сепаратрисные диаграммы точек x_0 и y_0 не пересекаются (см. рис. 64), т. е. $(D^{n-\lambda}(x_0) \cup D^\lambda(x_0)) \cap (D^{n-\lambda'}(y_0) \cup D^{\lambda'}(y_0)) = \emptyset$. Обозначим: $W = f^{-1}[a', b']$;

$$A = D^{n-\lambda}(x_0) \cup D^\lambda(x_0); \quad B = D^{n-\lambda'}(y_0) \cup D^{\lambda'}(y_0).$$

Тогда, очевидно,

$$W \setminus (A \cup B) \cong (f^{-1}(b') \setminus ((A \cup B) \cap f^{-1}(b'))) \times I[a', b'] \cong \\ \cong (f^{-1}(a') \setminus ((A \cup B) \cap f^{-1}(a'))) \times I[a', b'].$$

Это же соотношение можно записать так: дополнение $W \setminus (A \cup B)$ диффеоморфно прямому произведению

$$(f^{-1}(b') \setminus (S^{n-\lambda'-1}(y_0) \cup S^{n-\lambda-1}(x_0))) \times I[a', b'] \cong \\ \cong (f^{-1}(a') \setminus (S^{\lambda-1}(x_0) \cup S^{n-\lambda-1}(y_0))) \times I[a', b'],$$

где $I[a', b']$ — отрезок. (Для простоты будем считать, что $a' = 0$; $b' = 1$.) В частности, диффеоморфизм между многообразием $f^{-1}(b') \setminus (S^{n-\lambda'-1}(y_0) \cup S^{n-\lambda-1}(x_0))$ и многообразием $f^{-1}(a') \setminus (S^{n-1}(y_0) \cup S^{n-1}(x_0))$ осуществляется вдоль интегральных траекторий поля ξ . Рассмотрим гладкую функцию $\alpha(x)$ на $f^{-1}(a')$ такую, что $\alpha(x) = 0$ в достаточно малой окрестности $A \cap f^{-1}(a')$

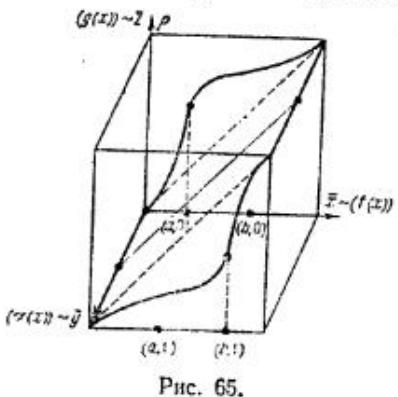


Рис. 65.

Рассмотрим гладкую функцию $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}$, задаваемую графиком на рис. 65.

На рис. 66 показана эволюция линий пересечения графика $\bar{z} = \rho(\bar{x}, \bar{y})$ с плоскостью $\bar{y} = t$ (const) при изменении t от 0 до 1.

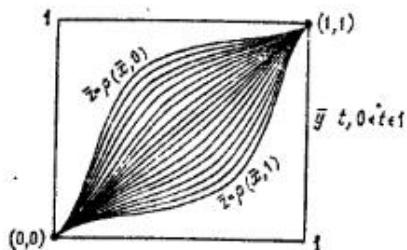


Рис. 66.

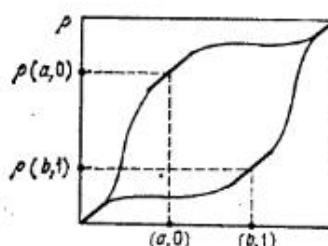


Рис. 67.

Формальные условия, наложенные на функцию ρ , запишем в следующем виде:

- 1) $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\rho(\bar{x}, \bar{y})) > 0$ при всех (\bar{x}, \bar{y}) и $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ возрастает от 0 до 1, когда \bar{x} возрастает от 0 до 1;
- 2) $\rho(a, 0) = b$; $\rho(b, 1) = a$;
- 3) $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\rho(\bar{x}, 0)) \equiv 1$ для всех \bar{x} в окрестности a ; $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\rho(\bar{x}, 1)) \equiv 1$ для всех \bar{x} в окрестности b (см. рис. 67).

Определим теперь искомую функцию $g(x) = \rho(f(x), \alpha(x))$, $x \in W$. Тогда $g(x_0) = \rho(f(x_0), \alpha(x_0)) = \rho(a, 0) > \rho(b, 1) = \rho(f(y_0), \alpha(y_0)) = g(y_0)$. Итак, $g(x_0) > g(y_0)$. Из условий 1)–3) на функцию ρ следует, что функция $g(x)$ удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в условии леммы. Лемма доказана.

Лемма 2. Рассмотрим $W = f^{-1}[a', b']$. Пусть $x_0, y_0 \in W$; $f(x_0) < f(y_0)$ и $\lambda(x_0) = (\text{индекс } f \text{ в точке } x_0) \geq \lambda(y_0) = (\text{индекс } f \text{ в точке } y_0)$. Тогда существует функция Морса g на M такая, что $g(x_0) >$

$> g(y_0)$; g имеет те же критические точки, что и f ; функция $g(x)$ удовлетворяет всем другим условиям предыдущей леммы.

Доказательство. В случае, когда $A \cap B = \emptyset$, лемма доказана (см. предыдущую лемму). В общем случае $A \cap B \neq \emptyset$. Редуцируем этот случай к ситуации: $A \cap B = \emptyset$. Рассмотрим поверхность $\{f(x) = 1/2\} = V$ (мы считаем $a' = 0$; $b' = 1$; $0 < f(x_0) < \frac{1}{2} < f(y_0) < 1$). Положим $\lambda = \lambda(x_0)$, $\lambda' = \lambda(y_0)$. Пусть $A \cap B \neq \emptyset$. Это означает, что на поверхности V $S^{n-\lambda-1}(x_0) \cap S^{\lambda'-1}(y_0) \neq \emptyset$, см. рис. 68.

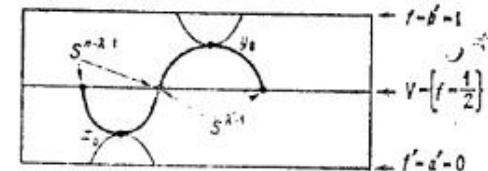


Рис. 68.

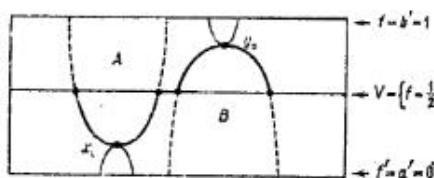


Рис. 69.

Так как $\dim S^{n-\lambda-1}(x_0) + \dim S^{\lambda'-1}(y_0) = n - \lambda - 1 + \lambda' - 1 = n - (\lambda - \lambda') - 2 < n - 1$, то из общей теоремы

≥ 0 о t -регулярности (см. [1], ч. II, § 10) следует, что существует сколь угодно малая изотопия вложения $i: S^{\lambda'-1} \rightarrow V$ в близкое вложение, которое уже будет иметь пустое пересечение со сферой $S^{n-\lambda-1}(x_0)$. Ясно, что эту изотопию можно продолжить в малую окрестность поверхности V , сделав ее (изотопию) тождественной вне этой окрестности. Подвергнув искомой изотопии градиентно-подобное поле ξ , мы получим уже две непересекающиеся сепаратрисные диаграммы A и B (см. рис. 69).

Мы редуцировали ситуацию к случаю $A \cap B = \emptyset$. Лемма доказана.

• Тем самым утверждение теоремы о существовании правильной функции Морса полностью доказано. Вторую часть утверждения теоремы (о существовании правильной функции Морса с одним максимумом и с одним минимумом) мы оставляем читателю в качестве полезного (и довольно простого, особенно для двумерных многообразий) упражнения.

Рассмотрим теперь более подробно процесс приклейки клетки σ^λ к границе многообразия M_{-e} (см. выше). Выясним, что происходит с многообразием M_{-e} после «подъема за критическую точку x_λ » с дифференциальной точки зрения, т. е. как меняется многообразие M_{-e} с точки зрения так называемой операции приклейки ручек.

Рассмотрим прямое произведение $H_\lambda^n = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$, где D^q — диск размерности q . Многообразие (с краем) H_λ^n называется ручкой индекса λ . Ясно, что граница ∂H_λ^n имеет вид $\partial H_\lambda^n = (\partial D^\lambda) \times D^{n-\lambda} \cup D^\lambda \times (\partial D^{n-\lambda}) = (S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}) \cup (D^\lambda \times S^{n-\lambda-1})$. Определим операцию приклейки ручки H_λ^n к многообразию K' с краем $V^{n-1} = \partial K'$. Пусть $S^{n-\lambda-1} \subset V^{n-1}$ — гладко вложенная сфера такая, что достаточно малая трубчатая окрестность $T_e(S^{n-\lambda-1})$

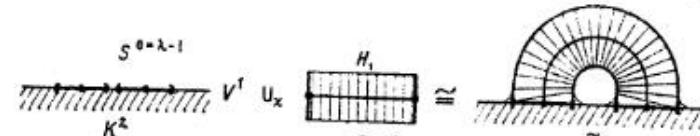


Рис. 71.

(радиуса $e > 0$) представляется в виде прямого произведения $T_e(S^{n-\lambda-1}) \cong S^{n-\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, где $\{s \times D^{n-\lambda}\}, s \in S^{n-\lambda-1}$, — нормальные диски (радиуса e) к сфере $S^{n-\lambda-1}$ (см. рис. 70).

Тогда можно построить новое гладкое многообразие \tilde{K}'^n с краем $\tilde{V}^{n-1} = \partial \tilde{K}'^n$, рассмотрев склейку K' с H_λ^n по отображению $\chi: S^{n-\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \rightarrow T_e(S^{n-\lambda-1}) \cong S^{n-\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, являющемуся диффеоморфизмом $S^{n-\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ (части границы ∂H_λ^n) на трубчатую окрестность $T_e(S^{n-\lambda-1})$. На рис. 71 показана операция приклейки ручки H_1^2 при $n = 2$.

Сглаживая «углы», возникшие в точках $x \in \partial T_e(S^{n-\lambda-1}) = S^{n-\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$, получаем гладкое многообразие \tilde{K}'^n с глад-

ким краем \tilde{V}^{n-1} . (На рис. 72 это сглаживание показано пунктиром.)

На рис. 72 показана операция приклейки ручки H_3^3 к K^3 .

На рис. 73 показана операция приклейки ручки H_3^3 и K^3 .

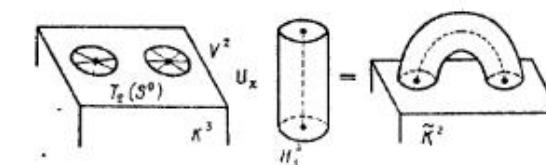


Рис. 72.

Теорема 2. Любое гладкое компактное связное замкнутое многообразие M^n диффеоморфно объединению ручек $[H_\lambda^n]$, где P_λ — критические точки некоторой функции Морса на M^n ; λ — индекс P_λ , и каждой точке P_λ соответствует ручка H_λ^n .

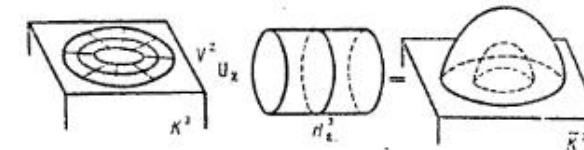


Рис. 73.

Доказательство. Так как M_a диффеоморфно M_b при $a < b$, если на отрезке $[a, b]$ нет критических значений функции $f(x)$, то достаточно изучить изменение M_{-e} при переходе через критическую точку P_λ . Рассмотрим гладкую деформацию $M_a \rightarrow M_{-e}$ (см. лемму 15.3), но теперь изменим ее так, как показано на рис. 74.

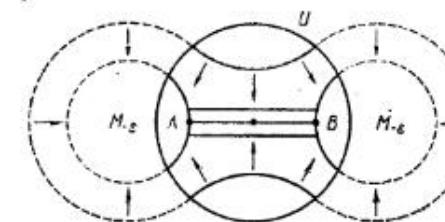


Рис. 74.



Рис. 75.

Результат деформации показан на рис. 75.

Ясно, что «осью» ручки H_λ^n является диск $D^\lambda(x^1, \dots, x^\lambda)$, состоящий из интегральных траекторий поля $\varphi(x) = -\text{grad } f(x)$, выходящих из особой точки поля $\varphi(x)$. Теорема доказана.

Если, наоборот, задано разложение многообразия M в сумму ручек $\{H_\lambda^n\}$, то можно восстановить некоторую функцию Морса $f(x)$ на M^n такую, что ассоциированное с ней разложение M в сумму ручек совпадает с исходным разбиением M в объединение ручек $\{H_\lambda^n\}$. Доказательство проводится индукцией по числу ручек и их индексу. Ручки $\{H_0^n\}$ можно отождествить с дисками D^n , центры которых можно объявить критическими точками индекса 0. Функцию $f(x)$ будем строить, предъявляя ее гладкие поверхности уровня f_c (функция $f(x)$ будет определена неоднозначно). Тогда в качестве поверхностей $\{f_c\}$ в дисках $\{D^n\} = \{H_0^n\}$ возьмем

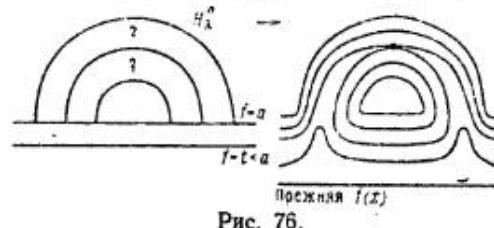


Рис. 76.

концентрические сферы с центром в локальных минимумах функции $f(x)$. Пусть $f(x)$ уже построена на гладком многообразии $\{f < a\}$ с краем $V^{n-1} = \{f = a\}$ и пусть ручка H_λ^n приклеена к краю V^{n-1} . Требуется продолжить $f(x)$ на ручку H_λ^n . Продолжение показано на рис. 76.

Полученная функция $g(x)$ снова оказалась постоянной на краю многообразия $\{f < a\} \cup H_\lambda^n$, поэтому процесс можно продолжить.

Рассмотрим двумерные многообразия $\{M^2\}$ и рассмотрим их разложения в суммы ручек $\{H_\lambda^2\}$ в соответствии с доказанными выше теоремами. Попутно мы еще раз докажем теорему классификации двумерных поверхностей (см. § 3).

Рассмотрим на M^2 правильную функцию Морса $f(x)$; пусть x_0 — точка минимума (единственная точка индекса 0); x_1, \dots, x_N — точки индекса 1; x_{N+1} — точка максимума (единственная точка индекса 2), причем $f(x_i) < f(x_{i+1})$, $0 < i < N$. Будем считать, что $0 < f(x) < N + 1$ и $f(x_i) = i$. Тогда множество $0 < f < e < 1$ является ручкой H_0^2 (гомотопически эквивалентной точке σ^0 — нульмерной клетке). При переходе через критическое значение $f(x_1) = 1$ возникает прилейка ручки H_1^2 (см. рис. 77).

При $n = 2$ существуют только два способа прилейки ручки H_1^2 к H_0^2 (см. рис. 78).

Гомотопически оба способа прилейки эквивалентны, однако они различны, если рассматривать диффеоморфизмы полученных многообразий с краем: $H_0^2 \cup H_1^2 \cong S^1 \times D^1$ (цилиндр);

$H_0^2 \cup H_1^2$ (лист Мёбиуса). В первом случае получается ориентируемая поверхность (с краем), во втором — неориентируемая.

Продолжая процесс и переходя к точкам x_2, x_3, \dots, x_N , мы на каждом шаге приклеиваем одномерную клетку σ_i^1 , $1 \leq i \leq N$; а в терминах ручек — либо приклеиваем $S^1 \times D^1$, либо приклеиваем лист Мёбиуса. После перехода через точку x_N ($f(x_N) = N$) с гомотопической точки зрения мы получаем букет окружностей: $\bigvee_{i=1}^N S^1$; каждая окружность $S_i^1 = \sigma_i^1 \cup \sigma^0$ соответствует критической точке x_i (индекса 1). Последний шаг заключается в приклейке ручки $H_2^2 \cong D^2$, т. е. двумерной клетки σ^2 , гомеоморфной

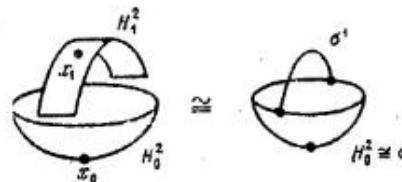


Рис. 77.



Рис. 78.

диску D^2 . Таким образом, M^2 гомотопически эквивалентно клеточному комплексу: $\sigma^0 \cup \sigma_1^1 \cup \dots \cup \sigma_N^1 \cup \sigma^2$ и диффеоморфно: $H_0^2 \cup H_1^2 \cup \dots \cup H_1^2 \cup H_2^2$. Прилейка клетки (ручки) $D^2 = H_2^2$

к полученному на $(N + 1)$ -м шаге многообразию K^2 с краем $S^1 = \partial K^2$ может быть осуществлена уже только одним способом: по тождественному отображению $I_{S^1}: \partial D^2 \rightarrow \partial K^2$.

Клетка $\sigma^2 \cong D^2$ может быть отождествлена с фундаментальным многоугольником W , полученным нами ранее при доказательстве теоремы классификации $\{M^2\}$, а букет $\bigvee_{i=1}^N S^1$ можно отождествить с границей многоугольника W , на которой все вершины уже отождествлены в одну вершину.

На рис. 79 показан последовательный процесс восстановления тора $T^2 = M_{g-1}^2$ для стандартного его вложения в \mathbb{R}^3 такого, что $f(P) = z$ (функция высоты) является функцией Морса с 4 критическими точками: x_0 (мин); x_1, x_2 (седла индекса 1); x_3 (макс). Для $g > 1$ аналогичная функция высоты на M_g^2 имеет $2g + 2$ невырожденных критических точек: x_0 (мин); x_1, \dots, x_{2g} (седла); x_{2g+1} (макс).

На любом M_g^2 можно построить гладкую функцию высоты $f(x)$ в \mathbb{R}^3 с 4 критическими точками (мин, макс и два седла). Эти седла будут вырождены при $g > 1$. Искомое вложение $M_g^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ показано на рис. 80.

Седла x_1, x_2 вырождены при $g > 1$, и функция высоты в окрестности точек x_1, x_2 устроена как функция $\operatorname{Re} (x + iy)^{1+\varepsilon}$ (см. рис. 80). Далее, на любом M^2 ($M_{g>0}^2$ или M_μ^2) существует гладкая функция $f(x)$ с тремя критическими точками: min, max, седло (вырожденное). (Докажите, что эта функция для $M_{g>0}^2$ не может быть реализована как функция высоты при некотором вложении

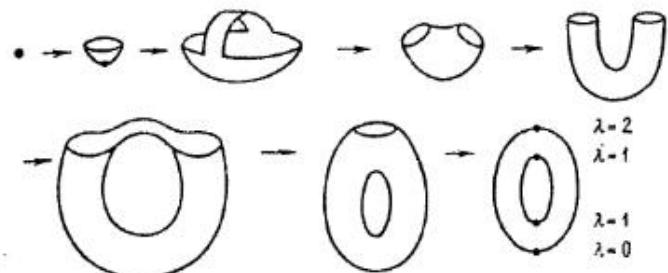


Рис. 79.

$M_g^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.) В самом деле, рассмотрим симметричную каноническую форму M_g^2 (или M_μ^2): $W = a_1 \dots a_n \cdot a_1^{-1} \dots a_{N-1}^{-1} a_N^{+1}$ (см. о существовании такой формы § 3). Искомая функция $f(x)$ задана на рис. 81 своими линиями уровня (неоднозначно): слева от ab — max, справа — min, вырожденное седло — в вершине фундаментального многоугольника. Функция $f(x)$ имеет в малой окрестности этого вырожденного седла вид $\operatorname{Re} (x + iy)^k$ (найдите k как

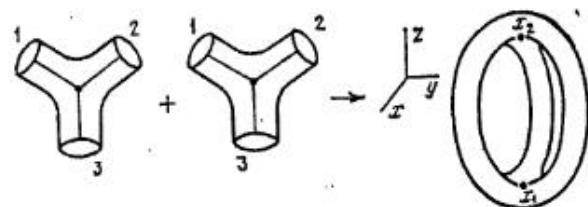


Рис. 80.

функцию от g или μ). Распад этой вырожденной особой точки в объединение невырожденных особенностей продемонстрирован на рис. 82. Распад продемонстрируем в терминах соответствующего векторного поля $\operatorname{grad} f$; критические точки f совпадают с особенностями поля $\operatorname{grad} f$.

Положим $f(x, y) = \operatorname{Re}(z^k)$ (где $z = x + iy$). Тогда точка $0 \in \mathbb{R}^2(x, y)$ — вырожденная критическая точка f (и вырожденная особенность для поля $\varphi(x, y) = \operatorname{grad} \operatorname{Re}(z^k)$). На рис. 82 показана картина интегральных траекторий поля φ .

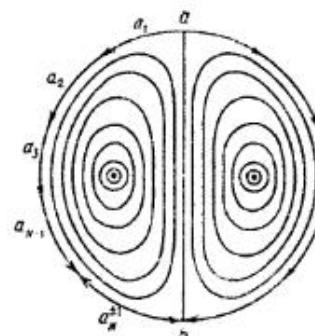


Рис. 81.

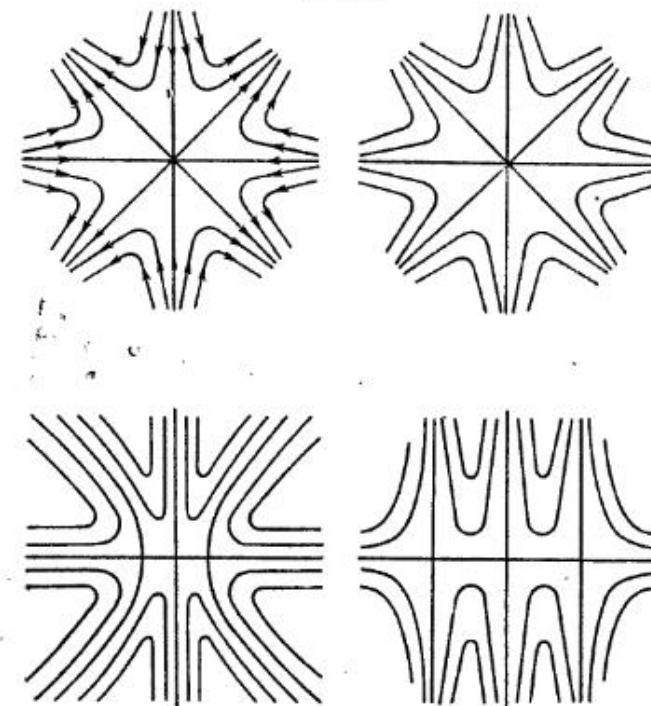


Рис. 82.

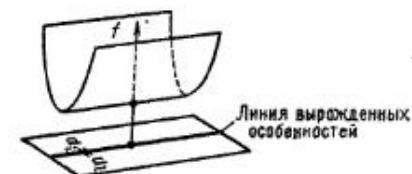


Рис. 83.

Рассмотрим малое возмущение $f(x, y) \rightarrow \operatorname{Re} \prod_{\alpha=1}^k (z - e_\alpha)$,

где $e_i \neq e_j$, при $i \neq j$. На рис. 82 показан распад вырожденной особенности в объединение $k - 1$ невырожденных особых точек.

З а м е ч а н и е. При построении на многообразии M^2 гладкой функции f с тремя критическими точками мы воспользовались следующим представлением M^2 : $W = a_1 a_2 \dots a_k a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{N-1}^{-1} a_N^{+1}$ и разбили многоугольник W отрезком (ab) так, чтобы по одну сторону от (ab) не было пары сторон, занумерованных одной и той же буквой a_i . Это нам было необходимо для того, чтобы избежать (при построении функции) появления непрерывного множества вырожденных критических точек (см. рис. 83).

§ 18. Двойственность Пуанкаре

В топологии, алгебраической геометрии и гомологической алгебре под одним общим термином «двойственность Пуанкаре» понимают совокупность утверждений об изоморфизме гомологий и когомологий дополнительных размерностей в различных ситуациях. Простейшая теорема (Пуанкаре) утверждает, что для замкнутого компактного гладкого связного многообразия M^n имеет место изоморфизм: $H_k(M; \mathbb{R}) \cong H_{n-k}(M; \mathbb{R})$, где $H_*(M; \mathbb{R})$ — группы гомологий с вещественными коэффициентами, $n = \dim M^n$. Этот изоморфизм, очевидно, эквивалентен условию $b_k(M) = b_{n-k}(M)$ на числа Бетти многообразия M . Если многообразие M неориентируемо, то тогда двойственность Пуанкаре имеет место для гомологий по модулю 2: $H_k(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$. Мы будем рассматривать ориентируемые многообразия. Неориентируемый случай исследуется аналогично.

В основе двойственности лежит следующее.

Мы построим два клеточных разбиения: K и \tilde{K} многообразия M^n , двойственных друг другу. Более точно, мы сопоставим каждой клетке $\sigma^i \in K$ (с помощью некоторого соответствия $D: K \rightarrow K$) некоторую $(n-i)$ -мерную клетку $D(\sigma^i) = \delta^{n-i}$ (т. е. клетку дополнительной размерности), причем соответствие D будет удовлетворять следующим условиям:

1. D — взаимно однозначное соответствие между клетками комплекса K и клетками комплекса \tilde{K} .

2. Для любых двух клеток $\sigma^i, \sigma^{i-1} \in K$ их коэффициент инцидентности $[\sigma^i : \sigma^{i-1}]$ с точностью до знака, зависящего только от размерности i , равен коэффициенту инцидентности клеток $\delta^{n-i}, \delta^{n-i+1}$, соответствующих исходным клеткам при соответствии D ; т. е. $[\sigma^i : \sigma^{i-1}] = \pm [\delta^{n-i+1} : \delta^{n-i}]$. Напомним, что мы рассматриваем ориентируемый случай. В случае же неориентируемого многообразия коэффициент инцидентности

следует брать по модулю 2, т. е. в неориентируемом случае будет выполняться равенство $[\sigma^i : \sigma^{i-1}] = [\delta^{n-i+1} : \delta^{n-i}] \bmod 2$.

Рассмотрим на M^n правильную функцию Морса $f(x)$, критические точки которой упорядочены относительно своих индексов, т. е. $f(x_i) \geq f(x_j)$, если $\lambda_i > \lambda_j$. Существование такой «правильной» функции Морса было доказано нами выше.

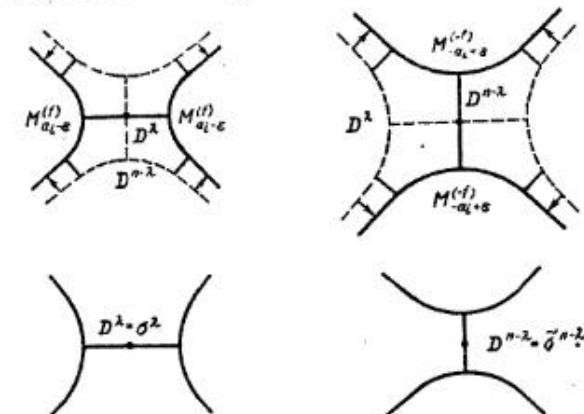


Рис. 84.

Зададим на M^n ориентацию и рассмотрим наряду с функцией f функцию $-f = g$. Ясно, что если x_i — критическая точка для f индекса λ_i , то x_i — критическая точка и для $g = -f$ индекса $n - \lambda_i$.

Возьмем в качестве клеточного разбиения K многообразия M разбиение, порожденное функцией f (см. выше), а в качестве \tilde{K} — разбиение, порожденное функцией $-f$.

Рассмотрим более внимательно связь между комплексами K и \tilde{K} . Имеем малую окрестность $U(x_i)$ точки x_i , и ее разложение с помощью функций f и $-f$ (см. рис. 84).

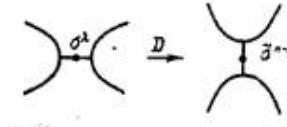


Рис. 85.

Построим теперь искомое соответствие (отображение клеток) D , где $D: K \rightarrow \tilde{K}$.

Положим $D(\sigma^\lambda) = \delta^{n-\lambda}$ (см. рис. 85). Клетки σ^λ для функции f и $\delta^{n-\lambda}$ для функции $g = -f$ были определены в § 15.

Изучим теперь связь между коэффициентами инцидентности: $[\sigma^\lambda : \sigma^{\lambda-1}]$ и $[\delta^{n-\lambda+1} : \delta^{n-\lambda}]$.

Рассмотрим клетку σ_i^λ (i — номер клетки) и клетку $\sigma_j^{\lambda-1}$; число $[\sigma_i^\lambda : \sigma_j^{\lambda-1}]$ есть, по определению, степень отображения $p_{ij}^\lambda: S_i^{\lambda-1} \rightarrow S_j^{\lambda-1}$, где $S_i^{\lambda-1} = \partial(\sigma_i^\lambda)$ (т. е. граница клетки σ_i^λ); p_{ij}^λ совпадает с композицией характеристического отображения

$\partial\sigma_i^\lambda \rightarrow K^{\lambda-1}$, ограниченного с σ_i^λ на ее границу $\partial\sigma_i^\lambda$, и проекции фактор-комплекса $K^{\lambda-1}/K^{\lambda-2} = \bigvee S_i^{\lambda-1}$ на j -е слагаемое этого букета $S_i^{\lambda-1}$ (см. рис. 86).

Полученное число (см. [1], ч. II, § 15) совпадает с индексом пересечения сферы $S_i^{\lambda-1} = \partial\sigma_i^\lambda$ с клеткой $\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ (см. рис. 87).

Ясно, что индекс пересечения сферы $S_i^{\lambda-1}$ с клеткой $\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ равен коэффициенту зацепления сферы $S_i^{\lambda-1}$ со сферой $\tilde{S}_j^{n-\lambda} = \partial\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ (мы опустили здесь обозначение характеристического отображения). Обозначим этот коэффициент зацепления через $w(S_i^{\lambda-1}; \tilde{S}_j^{n-\lambda})$. Итак, доказано, что $[\sigma_i^\lambda : \sigma_i^{\lambda-1}] = w(S_i^{\lambda-1}; \tilde{S}_j^{n-\lambda})$.

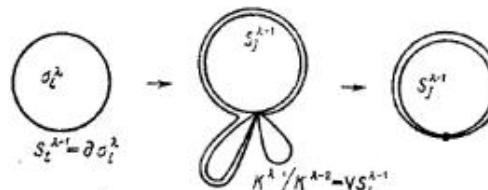


Рис. 86.

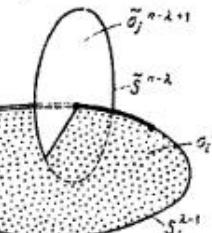


Рис. 87.

$\tilde{S}_j^{n-\lambda}$). Совершенно аналогично получаем, что $[\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1} : \tilde{\sigma}_i^{n-\lambda}] = w(S_j^{n-\lambda}; S_i^{n-\lambda})$. Сравнивая две последние формулы, получаем окончательно, что комплексы K и \tilde{K} двойственны, т. е. $[\sigma^\lambda : \sigma^{\lambda-1}] = \pm [\tilde{\sigma}^{n-\lambda-1} : \sigma^{n-\lambda}]$.

Таким образом, оператор двойственности $D: K \rightarrow \tilde{K}$ обладает тем свойством, что клетки σ_i^λ и $\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda} = D\sigma_j^\lambda$ пересекаются только в одной внутренней точке и при этом трансверсально (для ориентируемых многообразий M^n при выбранной ориентации клеток этот индекс пересечения равен +1). Остальные пары клеток вообще не пересекаются. Клетки дают базис целочисленных (и других) групп цепей $C_\lambda(K)$ и $C_\mu(\tilde{K})$. Тем самым между группами цепей установлено невырожденное билинейное скалярное произведение $a \circ b$, называемое «индексом пересечения»: если $a \in C_\lambda(K)$ и $b \in C_{n-\lambda}(\tilde{K})$, то

$$\sigma_i^\lambda \circ D\sigma_j^\lambda = \delta_{ij}, \quad a \circ b = \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i^\lambda \circ \tilde{\sigma}_j^{n-\lambda})$$

(в неориентируемом случае по модулю 2); здесь

$$a = \sum_i a_i \sigma_i^\lambda, \quad b = \sum_j b_j \tilde{\sigma}_j^{n-\lambda}.$$

Было доказано свойство сопряженности

$$(da) \circ b = a \circ (db),$$

где $a \in C_\lambda(K)$, $b \in C_{n-\lambda-1}(\tilde{K})$, поскольку $[\sigma_i^\lambda : \sigma_i^{\lambda-1}] = [\partial\sigma_i^\lambda : D\sigma_i^{\lambda-1}]$.

Тем самым комплекс $(C(\tilde{K}), \partial)$ сопряжен к комплексу $(C(K), \partial)$. Отсюда следует:

Теорема 1. Имеет место канонический «изоморфизм двойственности Пуанкаре»:

$$H_k(M^n) \cong H^{n-k}(M^n),$$

где M^n — замкнутое ориентируемое гладкое многообразие. В частности, для чисел Бетти имеем

$$b_k = b_{n-k}$$

(ранги H_k, H_{n-k} совпадают). Между гомологиями дополнительных размерностей H_k и H_{n-k} построена невырожденная (для целочисленных гомологий унимодулярная) билинейная форма, именуемая «индексом пересечения циклов». Если $n = 2k$, то $n - k = k$ и мы имеем невырожденную форму на $H_k(M)$: $a \circ b = (-1)^k b \circ a$.

Доказательство теоремы немедленно следует из предыдущего вывода с дополнительным замечанием, что оба комплекса K и \tilde{K} гомотопически эквивалентны M^n и имеют поэтому одинаковые гомологии и когомологии согласно результатам § 5.

Пример 1. Для любого ориентируемого связного многообразия M^n имеем $H_0 = Z = H_n(M^n)$.

У неориентируемого многообразия имеем $H_0(M^n, Z) = Z$ (всегда), но $H_n(M^n, Z) = 0$. По модулю 2 имеем $H_0(M^n, Z_2) = Z_2 = H_n(M^n, Z_2)$.

Пример 2. Пусть $n = 2$ и M^2 — ориентируемо. Группа $H_1(M^2, Z)$ имеет невырожденную кососимметрическую форму — индекс пересечения. Поэтому размерность b_1 четна и имеется канонический базис циклов $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$, где

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}.$$

Группа $H_1(M^2; Z)$ не имеет кручения, и все циклы a_1, b_1 можно выбрать целочисленными.

Пример 3. Пусть $M^2 = RP^2$ (неориентируемо). Группа $H_1(RP^2, Z_2) = Z_2$ с одной образующей x (проективная прямая $RP^1 \subset RP^2$). Из невырожденности формы $a \circ b \pmod{2}$ на группе $H_1(M^2, Z_2)$ получаем

$$x \circ x = 1 \pmod{2}.$$

Пример 4. Пусть M^4 ориентируемо. В многообразии $M^n \times M^n$ имеем цикл $\Delta = (x, x)$ — диагональ, $\Delta \in H_n(M^n \times M^n)$. Индекс пересечения $\Delta \circ \Delta$ равен эйлеровой характеристике, так как это число $\Delta \circ \Delta$ совпадает с суммарной особенностью векторного поля (см. [1], ч. II, § 15). В группах $H_k(M^n \times M^n, R) = \sum_{q+l=k} H_q(M^n) \otimes H_l(M^n)$ имеется базис циклов $z_l \otimes$

$\otimes z_j$, где $\{z_i\}$ — базис в группе $H_*(M^n)$. Индекс пересечения здесь имеет вид

$$(z_i \otimes z_j) \circ (z'_k \otimes z'_l) = (z_i \circ z'_k)(z_j \circ z'_l);$$

он нетривиален, только если $\dim z_i + \dim z'_k = n$, $\dim z_j + \dim z'_l = n$ (проверьте!)

Задача 1. Пусть задано отображение $f: M^n \rightarrow M^n$ и известны все отображения $f_{k*}: H_k(M^n; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M^n; \mathbb{R})$. Вычислите индекс пересечения $\Delta \circ \Delta_f$ в $M^n \times M^n$, где $\Delta_f = (x, f(x))$ — гра-

фик. Докажите формулу (Лефшеца) $\Delta \circ \Delta_f = \sum_{k=0}^n (-1)^k \operatorname{Sp} f_{k*}$. (Для неориентируемых многообразий нужно заменить \mathbb{R} на \mathbb{Z}_2 .) Число $\Delta \circ \Delta_f$ дает алгебраическое число неподвижных точек отображения f (см. [1], ч. II, § 15). Рассмотрите сначала более простые случаи: $M^n = S^n$, $M^n = T^n$, $M^n = \mathbb{RP}^n$, $M^n = M_g^2$. В частности, если f гомотопно отображению в точку, то $f_{k*} = 0$ при $k > 0$ и f_{0*} тождественно. В этом случае $\Delta \circ \Delta_f = 1 = \operatorname{Sp} f_{0*}$, что совпадает с результатом § 15 ч. II книги [1].

Задача 2. Доказать, что двойственность Пуанкаре в когомологиях $H^*(M^n)$ задается когомологическим умножением. Точно это означает, что форма

$$(ab, [M^n]) = \langle a, b \rangle$$

невырождена; здесь $a \in H^q(M^n)$, $b \in H^{n-q}(M^n)$, коэффициенты — поле. Если речь идет о целочисленных гомологиях и когомологиях $H^*(M^n; \mathbb{Z})$ и $H_*(M^n; \mathbb{Z})$, где есть кручение, то здесь закон двойственности Пуанкаре удобно получать из «оператора высечения» (см. § 7)

$$Da = a \cap [M^n], \quad (1)$$

где $a \in H^k(M^n; \mathbb{Z})$, а $a \cap [M^n] \in H_{n-k}(M^n; \mathbb{Z})$. Для полей коэффициентов в силу формулы

$$((a \cap [M^n]), b) = (ab, [M^n]) \quad (2)$$

и взаимной сопряженности H_q и H^q формула (1) не дает ничего содержательного нового.

Задача 3. Пусть $M \supset K$, причем M и K — конечные клеточные комплексы и $M \setminus K$ — открытое гладкое ориентируемое многообразие. Доказать равенства:

$$H_i(M, K; \mathbb{Z}) \cong H_i(M/K; \mathbb{Z}) \cong H^{n-i}(M \setminus K; \mathbb{Z}), \quad i > 0,$$

$$H^i(M, K; \mathbb{Z}) \cong H^i(M/K; \mathbb{Z}) \cong H_{n-i}(M \setminus K; \mathbb{Z}), \quad i > 0$$

(двойственность Лефшеца). Разобрать специальный случай: $i = 0$.

Задача 4. Пусть $K^m \subset S^n$ ($m < n$) — вложение конечного клеточного комплекса K^m в сферу S^n . Доказать равенства

$$H_i(K^m; \mathbb{Z}) \cong H^{n-i-1}(S^n \setminus K^m; \mathbb{Z}), \quad i > 0,$$

$$H^i(K^m; \mathbb{Z}) \cong H_{n-i-1}(S^n \setminus K^m; \mathbb{Z}), \quad i > 0$$

(двойственность Александера). Разобрать специальный случай: $i = 0$.

Задача 5. Пусть M^n — гладкое компактное замкнутое ориентируемое многообразие $H_k(M^n; \mathbb{Z}) = R_k \oplus T_k$ — разложение группы H_k в прямую сумму свободных абелевых групп R_k и абелевых групп конечного порядка T_k . Тогда имеют место следующие изоморфизмы: $R_k = R_{n-k}$, $T_k = T_{n-k-1}$.

Замечание. Соотношения: $R_k \cong R^k$, $T_k \cong T^{k+1}$ выполнены для любого конечного клеточного комплекса.

Напомним, что эйлеровой характеристикой многообразия M^n называется следующая альтернированная сумма: $\sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i = \chi(M^n)$, где $n = \dim M^n$; $\beta_i = \dim H_i(M^n; \mathbb{Z}_2)$ — числа Бетти mod 2 многообразия M^n . Из двойственности Пуанкаре (для замкнутых многообразий) получаем: $\beta_i = \beta_{n-i}$, а потому для нечетномерных многообразий M^{2k+1} имеем: $\chi(M^{2k+1}) = \sum (-1)^i \beta_i \equiv 0$ (для ориентируемых M^n можно пользоваться числами Бетти с $G = \mathbb{R}$).

§ 19. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ И КАТЕГОРИЯ ЛЮСТЕРНИКА — ШНИРЕЛЬМАНА

Если f — функция Морса, т. е. критические точки невырождены на многообразии M , то число критических точек функции f , как мы уже знаем из § 16, оценивается снизу: $\mu_k \geq b_k$, где μ_k — число критических точек индекса k и b_k — число Бетти: $b_k = \dim H_k(M; G)$, где $G = \mathbb{R}$, либо $G = \mathbb{Z}_2$ (или \mathbb{Z}_p , p — простое). Так, например, на любой двумерной поверхности типа M_g^2 любая функция Морса имеет не менее $(2g + 2)$ критических точек. Однако ситуация резко усложняется, если мы попытаемся оценить снизу число критических точек для произвольной гладкой функции f , которая уже не обязана быть функцией Морса. Как показывают простейшие примеры, число вырожденных особенностей может быть значительно меньше. Как было отмечено ранее, при деформации функции f в пространстве гладких функций невырожденные особенности могут сливаться друг с другом, образуя вырожденные особенности. Такие взаимные слияния уменьшают число критических точек. В то время как функция Морса на M_g^2 обязана иметь не менее $2g + 2$ критических точек, на любом M_g^2 существует гладкая функция с тремя критическими точками, из которых одна вырождена (и распадается в $2g$ невырожденных при подходящем возмущении), а две другие являются точками минимума и максимума. Неравенства типа $\sum_{(k)} \mu_k \geq \sum_{(k)} b_k$ все равно выполнены (см. § 16) и в том случае, когда f не является функцией Морса; однако теперь числа μ_k не имеют

того смысла, какой они приобретали в невырожденном случае (т. е. числа невырожденных особенностей индекса k). Теперь числа μ_k описывают «степень сложности» критических точек, которая уже не связана прямо с их количеством. Более того, как было показано ранее, не каждая критическая точка (вырожденная) обязана быть точкой бифуркации (см. § 16 выше), а потому неравенства $\sum_{(k)} \mu_k \geq \sum_{(k)} b_k$ могут не учитывать некоторых вырожденных особенностей. Таким образом, это не дает возможности произвести оценку снизу числа особенностей произвольной гладкой функции f на заданном многообразии M^n . Оказывается, существует некоторый топологический инвариант многообразия M^n (называемый категорией Люстерника — Шнирельмана) — $\text{cat}(M^n)$, оценивающий снизу число критических точек функции f . Переходим к описанию этого инварианта.

Пусть X — топологическое (хаусдорфово) пространство, $A \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество в X .

Определение 1. Категорией $\text{cat}_X(A)$ замкнутого подмножества A относительно пространства X называется минимальное число k , для которого существуют замкнутые подмножества A_1, \dots, A_k в X такие, что $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, и каждое подмножество A_i стягивается по пространству X в точку.

Замечание. Связность подмножеств $\{A_i\}$ не предполагается. Само пространство X будем, для простоты, предполагать связным. Если $A = X$, то будем (по определению) считать, что $\text{cat}_X(X) = \text{cat}(X)$. Это число и называется категорией Люстерника — Шнирельмана. Категория $\text{cat}_X(A)$ может принимать значения: 1, 2, 3, ...

Перечислим и докажем основные свойства $\text{cat}_X(A)$.

Лемма 1. Если $A \subset B \subset X$, то $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$.

Доказательство. Пусть $q = \text{cat}_X(B)$, т. е. существуют замкнутые подмножества B_i , $1 \leq i \leq q$, такие, что $B = \bigcup_{i=1}^q B_i$ и каждое B_i стягивается по X в точку. Рассмотрим замкнутые подмножества $A_i = A \cap B_i$, $1 \leq i \leq q$. Тогда, очевидно, $A = \bigcup_{i=1}^q A_i$ и каждое из A_i стягивается по X в точку. Следовательно, $\text{cat}_X(A) \leq q = \text{cat}_X(B)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть A и B — два произвольных замкнутых подмножества в X . Тогда $\text{cat}_X(A \cup B) \leq \text{cat}_X(A) + \text{cat}_X(B)$.

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ и $B = \bigcup_{j=1}^p B_j$; тогда $A \cup B = \bigcup_{\alpha=1}^{p+k} C_\alpha$, где $C_\alpha = A_i \cup B_j$ при $1 \leq i \leq k$ и $C_\alpha =$

$= B_{\alpha-k}$ при $k+1 \leq \alpha \leq p+k$. Так как A_i и B_j стягиваются по X в точку, то C_α стягиваются в точку и $\text{cat}_X(C_\alpha) \leq k+p = \text{cat}_X(A) + \text{cat}_X(B)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $A \subset B$ — замкнутые подмножества в X . Тогда $\text{cat}_X(\overline{B \setminus A}) \geq \text{cat}_X(B) - \text{cat}_X(A)$, где через $\overline{B \setminus A}$ обозначено замыкание множества $B \setminus A$ в X .

Доказательство. Так как $B = A \cup (\overline{B \setminus A})$, то, в силу леммы 2, получаем $\text{cat}_X(B) \leq \text{cat}_X(A) + \text{cat}_X(\overline{B \setminus A})$. Лемма доказана.

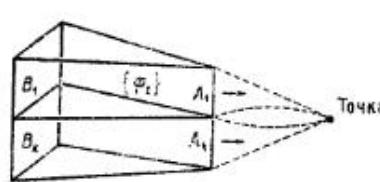


Рис. 88.

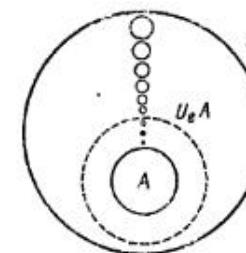


Рис. 89.

Лемма 4. Пусть $A \subset B$ — два замкнутых подмножества в X и пусть множество B непрерывно деформируется в подмножество A (т. е. существует гомотопия φ_t отображения вложения $i: B \rightarrow X$ в такое отображение $\varphi_t: B \rightarrow X$, при котором $\varphi_t(B) \subseteq A$). Тогда $\text{cat}_X(A) \geq \text{cat}_X(B)$. (Множество $\varphi_t(B) \subset X$ может быть не гомеоморфно B .)

Доказательство. Пусть $\text{cat}_X(A) = k$. Рассмотрим покрытие $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, где все A_i стягиваются по X в точку. Так как $\varphi_t(B) \subseteq A$, то можно рассмотреть $R_j = \varphi_t(B) \cap A_j$, $1 \leq j \leq k$. В силу условия леммы существует непрерывное отображение $\alpha: i(B) \rightarrow \varphi_t(B)$, где подмножество $i(B)$ гомеоморфно B . Положим $B_j = \alpha^{-1}(R_j)$, $1 \leq j \leq k$. Ясно, что $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$. Далее, применив к B_j гомотопию φ_t , мы продеформируем B_j по X в подмножество $\varphi_t(B_j) = R_j \subset A_j$, т. е. R_j стягивается по X в точку; тем самым каждое B_j стягивается в точку по X ; следовательно, $\text{cat}_X(B) \leq k$. Лемма доказана. См. рис. 88.

Лемма 5. Пусть $A \subset X$, A — компакт и X — многообразие. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\text{cat}_X(U_\varepsilon A) = \text{cat}_X(A)$, где через $U_\varepsilon(A)$ обозначена замкнутая ε -окрестность подмножества $A \subset X$. Число ε зависит от A .

Доказательство. Так как $A \subset U_\varepsilon A$, то по лемме 1 получаем: $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(U_\varepsilon A)$. Докажем обратное неравен-

ство. Пусть $\text{cat}_X(A) = k$ и $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, где каждое A_i стягивается по X в точку. Так как X — многообразие, то, очевидно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(A_i)$ стягивается (вслед за A_i) в точку по X ($1 \leq i \leq k$). Так как $U_\varepsilon(A) = \bigcup_{i=1}^k U_\varepsilon(A_i)$, то $\text{cat}_X(U_\varepsilon(A)) \leq k = \text{cat}_X(A)$. Лемма доказана.

Замечание. Если X — не многообразие, то лемма 5 не верна (см. рис. 89).

Лемма 6. *Предположим, что X — многообразие. Пусть A, B_n ($n = 1, 2, \dots$) — замкнутые подмножества в X и $A = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$, т. е. $\rho(A, B_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где X предполагается метрическим пространством, $\rho(C, D) = \sup_{x \in C} (\inf_{y \in D} \rho(x, y)) + \sup_{y \in D} (\inf_{x \in C} \rho(x, y))$; $\rho(x, y)$ — расстояние в X между точками x и y . Предположим, что $\text{cat}_X(B_n) \geq k$. Тогда и $\text{cat}_X(A) \geq k$.*

Доказательство. В силу леммы 5 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\text{cat}_X(U_\varepsilon A) = \text{cat}_X(A)$. Так как $\rho(A, B_n) \rightarrow 0$, то существует номер N такой, что $B_n \subset U_\varepsilon A$ для всех $n > N$. Тогда имеем: $k \leq \text{cat}_X(B_n) \leq \text{cat}_X(U_\varepsilon A) = \text{cat}_X(A)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть M^n — гладкое компактное связное замкнутое многообразие и $f(x)$ — гладкая функция на M^n . Тогда выполнено неравенство $k \geq \text{cat}(M^n)$, где k — число различных критических точек функции f . (В частности, k может равняться бесконечности.)*

Фактически теорема верна для точек бифуркации функции f , т. е. $\rho \geq \text{cat}(M^n)$, где ρ равно числу различных бифуркационных точек функции f . Обсудим сначала одну аналогию, имеющуюся между поведением категории множества критических точек функции f и поведением собственных чисел билинейной формы в \mathbb{R}^n .

Рассмотрим стандартное вложение сферы S^{n-1} в \mathbb{R}^n (x^1, \dots, x^n), т. е. $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$. Пусть $B(x, y)$ — симметричная билинейная вещественная форма в \mathbb{R}^n . Рассмотрим ассоциированную с ней гладкую функцию $f(x)$ на сфере S^{n-1} , задаваемую формулой $f(x) = B(x, x)$, $|x| = 1$. Найдем все критические точки функции f . Пусть $x \in S^{n-1}$, $\bar{a} \in T_x(S^{n-1})$; рассмотрим производную $\frac{df}{da}|_x$ функции f в точке x по направлению \bar{a} . Пусть $x(t)$ — любая гладкая кривая на сфере S^{n-1} такая, что $x(0) = x$, $\dot{x}(0) = \bar{a}$; тогда

$$\begin{aligned} \frac{df}{da}|_x &= \frac{d}{dt} f(x(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} B(x(t), x(t)) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \langle Bx(t), x(t) \rangle \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

где через $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ обозначен симметричный (относительно евклидова скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$) оператор, ассоциированный с формой B . Далее

$$\frac{df}{da}|_x = \frac{d}{dt} \langle Bx(t), x(t) \rangle \Big|_{t=0} = \langle B\dot{x}, x \rangle + \langle Bx, \dot{x} \rangle = 2 \langle Bx, \dot{x} \rangle.$$

Следовательно, точка $x_0 \in S^{n-1}$ является критической тогда и только тогда, когда $\langle Bx_0, \dot{x}_0 \rangle \equiv 0$ для любого вектора $\dot{x}_0 \in T_{x_0}S^{n-1}$. Это условие эквивалентно следующему: вектор Bx_0 ортогонален плоскости $T_{x_0}S^{n-1}$, т. е. $Bx_0 = \lambda x_0$, где λ — вещественное число.

Пусть $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ — собственные векторы формы B , и $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ — соответствующие собственные числа. В силу симметрии оператора B все векторы e_0, e_1, \dots, e_{n-1} попарно ортогональны (будем считать их единичными), а числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ вещественны. Напомним, что $f(e_\alpha) = \langle Be_\alpha, e_\alpha \rangle = \langle \lambda_\alpha e_\alpha, e_\alpha \rangle = \lambda_\alpha \langle e_\alpha, e_\alpha \rangle = \lambda_\alpha$. Будем считать, что числа λ_α (и векторы e_α) упорядочены по возрастанию, т. е. $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$.

Рассмотрим в сфере S^{n-1} всевозможные i -мерные экваторы S^i , т. е. сечения сферы S^{n-1} плоскостями размерности $i+1$, проходящими через начало координат. Обозначим множество всех этих «экваторов» через M_i (т. е. $M_i = \{S^i\}$). Фиксируем произвольный экватор $S^i \subset S^{n-1}$ и рассмотрим $\max_{x \in S^i} f(x)$. Тогда из

теории квадратичных форм хорошо известно, что имеет место равенство $\lambda_i = \inf_{M_i} (\max_{x \in S^i} f(x))$; $0 \leq i \leq n-1$. (Предлагаем

читателю самостоятельно доказать это соотношение.) Ясно, что приведенная выше формула согласована с фиксированным упорядочением: $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$. Отметим, что группа $SO(n)$ транзитивно действует на каждом классе M_i (любой экватор S^i получается из одного фиксированного экватора S_0^i путем некоторого вращения $g \in SO(n)$).

Предложение 1. *Число различных критических точек функции $f(x) = \langle Bx, x \rangle$ на сфере S^{n-1} не меньше удвоенного числа классов $\{M_i\}$, т. е. числа $2n$.*

Доказательство. Если все собственные числа $\{\lambda_\alpha\}$ формы B различны, то критическими точками функции f являются в точности точки $\{\pm e_\alpha\}$ (т. е. концы векторов $\pm e_\alpha$, $0 < \alpha \leq n-1$). Так как число таких точек равно $2n$, то n равно числу классов $\{M_i\}$, $0 \leq i \leq n-1$. Если же нашлась такая пара индексов $i < j$, что $\lambda_i = \lambda_j$, то тогда сфера S^{n-1} целиком состоит из вырожденных критических точек функции f и так как этих точек — континuum, то искомое утверждение, очевидно, выполнено.

Замечание. Так как функция $f(x) = \langle Bx, x \rangle$ инвариантна относительно отражения $x \rightarrow -x$, то $f(x)$ является фак-

тически функцией f на проективном пространстве $\mathbb{R}P^{n-1}$; для функции f доказанное выше предложение переформулируется так: число различных критических точек функции f на $\mathbb{R}P^{n-1}$ не меньше числа классов $\{M_i\}$, т. е. числа n .

После этих предварительных замечаний перейдем к изучению критических точек гладкой функции f на произвольном гладком компактном замкнутом многообразии M^n . Мы сделаем следующие замены в изложенной выше конструкции.

Сферу S^n мы заменим на многообразие M ; форму $B(x, x)$ заменим на произвольную гладкую функцию $f(x)$, $x \in M$; вместо вращений $g \in SO(n)$, сохранивших каждый класс M_i (см. выше), мы рассмотрим непрерывные гомотопии, которые, как будет показано, сохраняют некоторые классы замкнутых подмножеств — аналоги классов M_i ; вместо собственных чисел λ_i формы \bar{B} мы рассмотрим некоторые их аналоги, строящиеся по классам замкнутых подмножеств. Перейдем к подробному изложению.

Пусть M^n — гладкое компактное связное замкнутое многообразие. Через M_i обозначим класс всех замкнутых подмножеств $X \subset M^n$ таких, что $\text{cat}_M(X) \geq i$. Ясно, что $M_i = M_{i+1}$. Обозначим через $\theta(M^n)$ пространство всех замкнутых подмножеств в многообразии M^n . Пространство $\theta(M^n)$ превращается в метрическое пространство путем введения метрики

$$\rho(X, Y) = \sup_{x \in X, y \in Y} (\inf_{y' \in Y} \rho(x, y')) + \sup_{y \in Y, x \in X} (\inf_{x' \in X} \rho(y, x')).$$

где ρ — расстояние на M^n . Будем говорить, что $Y = \lim_{p \rightarrow \infty} X_p$, если $\lim_{p \rightarrow \infty} \rho(Y, X_p) = 0$; $Y, X_p \in \theta$.

Лемма 7. Каждый класс подмножеств $M_i \subset \theta(M^n)$ является замкнутым относительно операции предельного перехода \lim и относительно гомотопии подмножеств по многообразию M .

Доказательство. Пусть $X_p \in M_i$, $p = 1, 2, 3, \dots$; $X = \lim_{p \rightarrow \infty} X_p$; $\text{cat}_{M^n}(X_p) \geq i$ (по определению класса M_i). Требуется доказать, что $\text{cat}_{M^n}(X) \geq i$. Это немедленно следует из леммы 6. Далее: пусть $X \in M_i$ и $Y = \varphi_1 X \subset M^n$ — подмножество, полученное из X путем непрерывной деформации φ : $X \rightarrow M^n$. Так как $\text{cat}_{M^n}(X) \geq i$, то в силу леммы 4 $\text{cat}_{M^n}(Y) \geq i$, т. е. $Y \in M_i$, что и требовалось. Лемма доказана.

Таким образом, M_i — замкнутые подмножества в $\theta(M^n)$.

Пусть фиксирован класс M_i и пусть $X \in M_i$. Рассмотрим число $\lambda_i = \inf_{x \in M_i} (\max_{x' \in X} f(x))$. Это определение чисел λ_i воспроизводит соответствующую теорему из теории квадратичных форм (см. выше).

Обозначим через N категорию M^n : $\text{cat}(M^n) = N$. Ясно, что $N < \infty$. Из определения классов M_i получаем: $\theta = M_0 = M_1 \equiv$

$\equiv M_2 \equiv \dots \equiv M_N$. Здесь $\theta = M_0 = \{X \in \theta; \text{cat}_{M^n}(X) \geq 0\}$; ясно, что $\text{cat}_{M^n}(X) \geq 0$ для любого $X \in \theta$. Совпадение классов M_0 и M_1 очевидно; в частности, $\lambda_0 = \lambda_1$. Класс M_N содержит многообразие M^n . На классе M_N цепочка подмножеств $\{M_i\}$ обрывается.

Каждая гладкая функция f на многообразии M^n определяет набор функций f_0, f_1, \dots, f_N , где функция f_i ($0 \leq i \leq N$) определена на множестве M_i и задается формулой: $f_i(X) = \max_{x \in X} f(x)$, где $X \in M_i$. Тогда $\lambda_i = \inf_{x \in M_i} (f_i(x))$. Так как $M_i \equiv M_{i+1}$, то с ростом i числа λ_i могут только возрастать: $\lambda_0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$; здесь $N = \text{cat}(M^n)$. Поскольку классы $M_i \subset \theta$

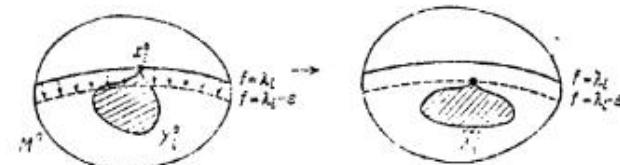


Рис. 90.

замкнуты относительно предельного перехода (см. лемму 7), то в каждом M_i ($0 \leq i \leq N$) существует элемент X_i^0 такой, что $f_i(X_i^0) = \lambda_i$. Иными словами X_i^0 — такое замкнутое подмножество в M^n , что $\lambda_i = \max_{x \in X_i^0} f(x)$.

Лемма 8. Рассмотрим поверхность уровня $f_{\lambda_i} = \{x \in M^n | f(x) = \lambda_i\}$. Тогда на поверхности f_{λ_i} существует по крайней мере одна критическая точка функции f .

Доказательство. Допустим противное: пусть на поверхности f_{λ_i} нет критических точек функции f . Рассмотрим класс M_i и пусть $X_i^0 \in M_i$ — такое замкнутое подмножество в M^n , что $\max_{x \in X_i^0} f(x) = \lambda_i$, т. е. $f_i(X_i^0) = \lambda_i$. Ввиду замкнутости X_i^0

существует точка $x_i^0 \in X_i^0$ такая, что $f(x_i^0) = \lambda_i$, т. е. $x_i^0 \in f_{\lambda_i}$. Так как, по предположению, $\text{grad } f(x) \neq 0$ для любого $x \in f_{\lambda_i}$, то (в силу компактности M^n) существует достаточно малая деформация поверхности f_{λ_i} вдоль интегральных траекторий векторного поля $(-\text{grad } f)$ (мы считаем, что на M^n задана риманова метрика) в область меньших, чем λ_i , значений функции f (см. рис. 90).

Так как M^n — компактное гладкое многообразие, то существует гладкая изотопия M^n по себе, постоянная вне малой окрестности слоя: $\lambda_i - \epsilon \leq f(x) \leq \lambda_i$ и переводящая $\{f = \lambda_i\}$ в $\{f =$

$= \lambda_i - \varepsilon$. Пусть \tilde{X}_i^0 — образ подмножества X_i^0 при этой деформации. Так как \tilde{X}_i^0 получено из X_i^0 гомотопией по M^n , то, в силу леммы, $\text{cat}_{M^n}(\tilde{X}_i^0) \geq \text{cat}_{M^n}(X_i^0)$ (в действительности имеет место равенство). Следовательно, $\text{cat}_{M^n}(\tilde{X}_i^0) \geq i$, т. е. $\tilde{X}_i^0 \in M_i$. Отсюда получаем, что $\sup_{x \in \tilde{X}_i^0} f(x) \leq \lambda_i - \varepsilon < \lambda_i$, а это означает, что $\inf_{x \in M_i} (\sup_{x \in X} f(x)) \leq \sup_{x \in \tilde{X}_i^0} f(x) < \lambda_i - \varepsilon < \lambda_i$, что невозможно по определению λ_i . Лемма доказана.

Лемма 9. Предположим, что $\lambda_i = \lambda_{i+p}$, где $p > 0$. Обозначим через S множество критических точек функции на поверхности

уровня $f_{\lambda_i} = \{f = \lambda_i\}$. Тогда $\text{cat}_{M^n}(S) \geq p + 1$.

Доказательство. Уместно отметить в этом месте аналогию с поведением критических точек функции $\langle Bx, x \rangle$ на сфере S^{n-1} : если $\lambda_i = \lambda_{i+p}$, то эллипсоид формы B , являясь эллипсоидом вращения вдоль собственных направлений $e_i, e_{i+1}, \dots, e_{i+p}$, порождает множество критических точек функции f , гомеоморфное сфере S^p . Переходим к доказательству леммы. Так как S замкнуто, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\text{cat}_{M^n}(S) = \text{cat}_{M^n}(U_\varepsilon S)$ (см. лемму 5). Допустим противное: что $\text{cat}_{M^n}(S) < p$. Рассмотрим цепочку классов $M_i \supset M_{i+1} \supset \dots \supset M_{i+p}$. Пусть $X_{i+p}^0 \in M_{i+p}$ — такое замкнутое подмножество, что $\sup_{x \in X_{i+p}^0} f(x) = \lambda_{i+p} = \lambda_i$.

Рассмотрим замкнутое множество $X^0 = \overline{X_{i+p}^0 \setminus (X_{i+p}^0 \cap U_\varepsilon S)}$ (см. рис. 91). Тогда $\text{cat}_{M^n}(X^0) \geq \text{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0) - \text{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0 \cap U_\varepsilon S) \geq \text{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0) - \text{cat}_{M^n}(U_\varepsilon S) = \text{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0) - \text{cat}_{M^n}(S) \geq i + p - p = i$.

Таким образом, $\text{cat}_{M^n}(X^0) \geq i$, т. е. $X^0 \in M_i$. Далее,

$$\lambda_i = \lambda_{i+p} = \sup_{x \in X_{i+p}^0} (f(x)) \geq \sup_{x \in X^0} (f(x)) \geq \lambda_i = \lambda_{i+p} = \sup_{x \in X_{i+p}^0} (f(x)).$$

Таким образом, доказано, что $\sup_{x \in X^0} (f(x)) = \lambda_i$, а потому множество X^0 можно считать одним из компактов X_i^0 в классе M_i . С другой стороны, $X_i^0 \cap S = \emptyset$ (где $X^0 = X_i^0$) по построению X^0 . Это противоречит лемме 8, согласно которой множество X_i^0 должно содержать по крайней мере одну критическую точку $x_i^0 \in S$ (т. е. на поверхности f_{λ_i}). Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство основной теоремы.

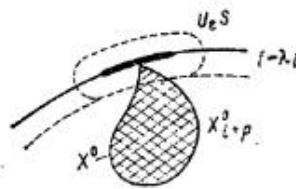


Рис. 91.

Итак, пусть $f(x)$ — гладкая функция на компактном гладком многообразии M^n . Требуется доказать, что число различных критических точек функции f не меньше, чем $\text{cat}(M^n)$. Рассмотрим цепочку классов: $\theta = M_0 = M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_N$, где $N = \text{cat}(M^n)$. Сначала рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$, т. е. $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq N$. Тогда, в силу леммы 8, на каждом критическом уровне f_{λ_i} , $1 \leq i \leq N$, имеется по крайней мере одна критическая точка функции $f(x)$; следовательно (поскольку критические поверхности f_{λ_i} различны при $1 \leq i \leq N$), число различных критических точек не меньше, чем $N = \text{cat}(M^n)$. Итак, в предположении: $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($1 \leq i, j \leq N$), теорема доказана.

Рассмотрим теперь общий случай: пусть среди $\{\lambda_i\}$ есть совпадающие числа; например, $\lambda_i = \lambda_{i+p}$. Сколько критических точек (различных) можно выбрать на поверхности $f_{\lambda_i} = f_{\lambda_{i+p}}$? Из леммы 9 получаем, что $\text{cat}_{M^n}(S) \geq p + 1$, где S — множество критических точек на поверхности f_{λ_i} . Так как $\text{cat}_{M^n}(S) \geq p + 1$, то в S можно выбрать по крайней мере $p + 1$ различных точек ($S = \bigcup_{\alpha=1}^{p+1} S_\alpha$, где каждое S_α стягивается по M^n в точку; доста-

точно выбрать по одной точке в каждом множестве S_α). Тем самым «однократное» значение λ_j (т. е. такое, что $\lambda_{j-1} < \lambda_j < \lambda_{j+1}$) дает вклад в виде по крайней мере одной критической точки, а каждое « $(p + 1)$ -кратное» значение λ_i (т. е. $\lambda_{i-1} < \lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+p} < \lambda_{i+p+1}$) дает вклад в виде по крайней мере $(p + 1)$ -й критической точки. Это и доказывает теорему в общем случае.

Как видно из доказательства, аналогичное утверждение справедливо и для бифуркационных точек гладкой функции f на M^n . Детальное проведение рассуждений мы оставляем читателю.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров. Первый вопрос, который следует изучить, — является ли полученная выше оценка наилучшей (в общем случае), т. е. существуют ли такие функции f и такие многообразия M^n , для которых число критических точек равно категории $\text{cat}(M^n)$. Уже простейшие примеры показывают, что такие пары (M^n, f) существуют.

Предложение 2. Пусть M^2 — двумерное гладкое компактное замкнутое многообразие. Тогда $\text{cat}(M^2) = 2$, если M^2 гомеоморфно сфере S^2 и $\text{cat}(M^2) = 3$, если M^2 не гомеоморфно сфере.

Доказательство. Если M^2 гомеоморфно сфере, то утверждение очевидно. Пусть теперь M^2 не гомеоморфно сфере.

Рассмотрим клеточное разбиение M^2 в виде $\sigma^0 \cup \left(\bigcup_{\alpha=1}^q \sigma_\alpha^1 \right) \cup \sigma^2$,

т. е. к букету окружностей $\bigvee_{\alpha=1}^q S_\alpha^1$ приклеена одна клетка σ^0 . Обозначим через $U_\varepsilon(\bigvee_\alpha S_\alpha^1)$ достаточно малую ε -окрестность одномерного остова $\bigvee S_\alpha^1$ в многообразии M^2 и пусть $\bar{D}^2 = M^2 \setminus U_\varepsilon(\bigvee S_\alpha^1)$ — замкнутый диск (см. рис. 92).

Представим M^2 в виде объединения трех замкнутых подмножеств: $M^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, где $A_1 = \bar{D}^2$ (стягивается по себе в точку), а множества A_2 и A_3 показаны на рис. 93. Здесь $A_2 = U_\varepsilon(\bigvee S_\alpha^1) \cap W_\eta(\sigma^0)$, где $W_\eta(\sigma^0)$ — диск радиуса η с центром в точке σ^0 (число η предполагается достаточно малым); $A_3 = \overline{U_\varepsilon(\bigvee S_\alpha^1)} \setminus A_2$ (замыкание).

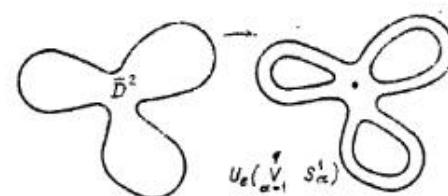


Рис. 92.

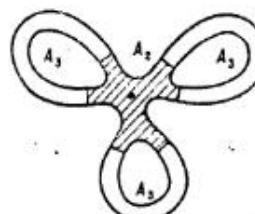


Рис. 93.

Ясно, что A_2 стягивается по себе в точку, а A_3 стягивается по себе в набор q точек, а потому стягивается в точку по M^2 . Итак, утверждение доказано.

Легко проверить, что если $\text{cat}(M^2) = 2$, то M^2 гомеоморфно сфере.

Теперь рассмотрим гладкие функции f на M^2 . Для сферы S^2 стандартная функция высоты имеет ровно две критические точки, что равно категории сферы. Если M^2 не гомеоморфно сфере, то, как было показано выше, на M^2 существует гладкая функция f с тремя критическими точками, что равно категории $\text{cat}(M^2)$. Итак, мы доказали, что нижняя грань — $\text{cat}(M^n)$ — достигается.

Вычисление $\text{cat}(M^n)$ является нетривиальной задачей; этот инвариант с большим трудом поддается точному вычислению. Получение оценок сверху на $\text{cat}(M^n)$ обычно не представляет труда для конкретного многообразия M^n — достаточно предъявить какое-либо конкретное стягиваемое покрытие $M^n = \bigcup_{i=1}^N A_i$. Более сложным вопросом является получение нижних оценок на $\text{cat}(M^n)$. Сейчас мы предъявим один такой способ оценки снизу $\text{cat}(M^n)$.

Рассмотрим кольцо когомологий $H^*(M^n; \mathbb{Z})$. Все нижеследующие конструкции дословно повторяются для кольца $H^*(M^n; \mathbb{Z}_p)$.

Число k называется «когомологической длиной» многообразия M^n , если k есть максимальное из всех чисел p со следующим свойством: существуют элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in H^*(M^n; \mathbb{Z})$ такие, что произведение $\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p$ отлично от нуля в $H^*(M^n; \mathbb{Z})$. Под «произведением» мы понимаем здесь обычное умножение в кольце когомологий.

Предложение 3. Имеет место неравенство: $\text{cat}(M^n) \geq k + 1$, где k — когомологическая длина многообразия M^n .

Доказательство. Пусть $D: H^k(M^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-k}(M^n; \mathbb{Z})$ — двойственность Пуанкаре, устанавливающая изоморфизм между указанными группами. Напомним, что если $\alpha, \beta \in H^*(M^n; \mathbb{Z})$ — два коцикла и $\alpha \cdot \beta$ — их произведение в кольце $H^*(M^n; \mathbb{Z})$, то $D(\alpha \cdot \beta) = D(\alpha) \cap D(\beta)$, где через $D(\alpha) \cap D(\beta)$ обозначено пересечение циклов $D(\alpha)$ и $D(\beta)$ (операция пересечения двойственна когомологическому умножению). Для наглядности можно представлять, что циклы $\gamma_1 = D(\alpha)$ и $\gamma_2 = D(\beta)$ реализованы в M^n в виде подмногообразий (или подмногообразий с особенностями); тогда цикл $\gamma_1 \cap \gamma_2$ получается как пересечение этих двух подмногообразий (после приведения их в общее положение; см. рис. 94). Рассмотрим произведение $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k \neq 0$ длины k в $H^*(M^n; \mathbb{Z})$ и пусть $\gamma_i = D(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq k$. Тогда $D(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k) = \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \dots \cap \gamma_k = \gamma$, где цикл γ не гомологичен нулю (напомним, что D — изоморфизм). Предположим теперь, что $\text{cat}(M^n) \leq k$. Это означает, что существуют такие замкнутые подмножества A_1, \dots, A_s ($s \leq k$) в M^n , что $M^n = \bigcup_{i=1}^s A_i$, и каждое A_i стягивается по M^n в точку. Без ограничения общности можно считать, что $M^n = \bigcup_{i=1}^k A_i$, где все A_i стягиваются в точку по M^n . Достаточно в качестве A_{s+1}, \dots, A_k (если $s < k$) взять произвольные ($k - s$) точек в M^n . Далее считаем, что $s = k$. Сопоставим каждому циклу γ_i ($1 \leq i \leq k$) подмножество A_i . Так как A_i стягивается в точку по M^n , то $H_*(M; \mathbb{Z})$ вкладывается в $H_*(M, A_i; \mathbb{Z})$ (где $* > 0$).

Отсюда получаем, что каждый цикл γ_i гомологичен циклу $\tilde{\gamma}_i \subset M \setminus A_i$, $1 \leq i \leq k$ (т. е. цикл γ_i можно «снять» с подмножества $A_i \subset M$). Но в таком случае $\bigcap_{i=1}^k \tilde{\gamma}_i$ с одной стороны гомологичен $\bigcap_{i=1}^k \gamma_i = \gamma$, а с другой стороны, $\bigcap_{i=1}^k \gamma_i \subset \bigcap_{i=1}^k (M \setminus A_i) = M \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) = \emptyset$, так как $M = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Это означает, что

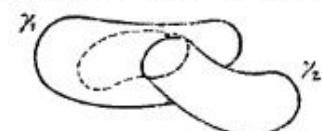


Рис. 94.

γ гомологичен плюю, что противоречит условию теоремы. Доказательство окончено.

Применим доказанное утверждение к задаче конкретного вычисления $\text{cat}(M^n)$. Так, например, если двумерное замкнутое компактное многообразие M^2 не гомеоморфно сфере, то $\text{cat}(M^2) \geq 3$. Доказательство немедленно следует из уже известной нам информации о строении $H^*(M^2; \mathbb{Z})$ и $H^*(M^2; \mathbb{Z}_2)$.

Докажем, что $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n + 1$. Получим сначала верхнюю оценку: $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) \leq n + 1$. Рассмотрим стандартное разложение $\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} A'_i$, где A'_i — открытые n -мерные диски, определяемые так: $A'_i = \{\lambda(x^1, \dots, x^n, \dots, x^{n+1}); x^i \neq 0\}$, где $\{x^\alpha\}, 1 \leq \alpha \leq n + 1$, — однородные координаты на $\mathbb{R}P^n$ (см. [1], ч. II, § 2). Так как $\{A'_i\}$ — открытое покрытие $\mathbb{R}P^n$, то в каждое множество A'_i можно вписать такой замкнутый диск A_i , что их объединение будет по-прежнему образовывать покрытие $\mathbb{R}P^n$ (достаточно немного уменьшить диски A'_i). Так как каждый диск A_i по себе стягивается в точку, то мы получили искомую верхнюю оценку.

Докажем теперь, что $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) \geq n + 1$. Для этого достаточно доказать, что когомологическая длина $\mathbb{R}P^n$ (с коэффициентами в \mathbb{Z}_2) равна n . В самом деле, $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x_1]/(x_1^{n+1})$, т. е. кольцо когомологий изоморфно кольцу усеченных полиномов от образующей x_1 (степень x_1 равна единице); через (x_1^{n+1}) обозначен идеал, порожденный элементом x_1^{n+1} . Тем самым произведение $x_1^n = x_1 \cdot \dots \cdot x_1$ (n раз) отлично от нуля. Итак, $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n + 1$.

Докажем, что $\text{cat}(T^n) = n + 1$, где T^n — n -мерный тор. Так как $H^*(T^n; \mathbb{Z}) = \Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — внешняя алгебра от одномерных образующих x_i , $1 \leq i \leq n$, то произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ отлично от нуля и, следовательно, $\text{cat}(T^n) \geq n + 1$. Докажем, что $\text{cat}(T^n) \leq n + 1$. Так как $T^n = S^1 \times T^{n-1}$, то T^n можно представить в виде $T^n = (S^1 \vee T^{n-1}) \cup \sigma^n$. Общее утверждение: $\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat}(X)$, если $\text{cat}(X) \geq 2$, где $X \vee S^n$ — «букет» сферы S^n и произвольного линейно связного клеточного комплекса X . В самом деле, пусть $\text{cat}(X) = k$ и $X = \bigcup_{i=1}^k A_i$, где каждое A_i стягивается по X в точку. Пусть $x_0 \in X$ — точка, в которой произведена склейка букета: $X \vee S^n$.

Представим S^n в виде объединения двух замкнутых дисков: $S^n = D_1^n \cup D_2^n$, где $x_0 \in D_1^n$; $x_0 \notin D_2^n$. Рассмотрим A_i , такое, что $x_0 \in A_i$; положим $B_\alpha = A_\alpha$, где $\alpha \neq i_0$ и $\alpha \neq j_0$, где j_0 — любой фиксированный индекс, отличный от i_0 : $B_{i_0} = A_{i_0} \cup D_1^n$; $B_{j_0} = A_{j_0} \cup D_2^n$. Отметим, что $A_{i_0} \cap D_2^n = \emptyset$ (см. рис. 95).

Таким образом, $X \vee S^n = \bigcup_{i=1}^k B_i$, где каждое B_i стягивается по $X \vee S^n$ в точку. Итак: $\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat}(X)$. В качестве

элементарного упражнения мы оставляем читателю доказательство следующего более общего утверждения: $\text{cat}(X \vee Y) = \max(\text{cat } X, \text{cat } Y)$, где X и Y — произвольные линейно связные пространства. Формула $\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat}(X)$ (если $\text{cat}(X) \geq 2$) есть частный случай этого утверждения. Возвращаясь к подсчету $\text{cat}(T^n)$, получаем: $\text{cat}(T^n) = \text{cat}((T^{n-1} \vee S^1) \cup \sigma^n) \leq \text{cat}(T^{n-1} \vee S^1) + 1$. Так как $\text{cat}(T^{n-1} \vee S^1) = \text{cat}(T^{n-1})$, и так как $\text{cat}(T^2) = 3$, то, по индукции, получаем: $\text{cat}(T^{n+1}) \leq n + 1$, что и требовалось доказать.

Пусть $p: E \rightarrow B$ — расслоение со слоем F в смысле Серра, т. е. выполнена аксиома о существовании накрывающей гомотопии.

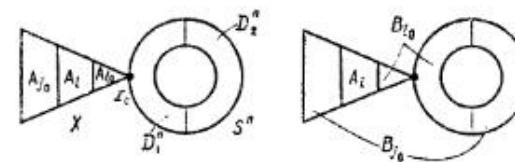


Рис. 95.

Предложение 4. Имеет место неравенство: $\text{cat}(E) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}(B)$, где $F \subset E$ — слой расслоения $p: E \rightarrow B$.

Доказательство. Требуемое утверждение мы получим как частный случай более общего утверждения: пусть $Y \subset B$ — замкнутое подмножество в базе B , $p^{-1}(Y) \subset E$ — его полный прообраз в E ; тогда выполнено неравенство: $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(Y)$. Ясно, что положив $B = Y$, получаем искомое утверждение.

Рассмотрим сначала случай, когда $\text{cat}_B(Y) = 1$. Следует проверить неравенство $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leq \text{cat}_E(F)$. Стягивая Y по базе B в точку, мы можем (по аксиоме о накрывающей гомотопии) накрыть эту деформацию деформацией подмножества $p^{-1}(Y)$ по E в слой F . В силу леммы 4 $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leq \text{cat}_E(F)$, что и требовалось.

Теперь рассмотрим общий случай: пусть $\text{cat}_B(Y) = k$. Тогда $Y = \bigcup_{i=1}^k A_i$, где каждое A_i стягивается по B в точку. Положим

$\tilde{Y} = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$; $A = A_k$; тогда $Y = \tilde{Y} \cup A$, где $\text{cat}_B(\tilde{Y}) \leq k - 1$, $\text{cat}_B(A) = 1$. Требуется проверить неравенство: $\text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y} \cup A)) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_E(\tilde{Y} \cup A)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y} \cup A)) &= \text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) + \text{cat}_E(p^{-1}(A)) \leq \\ &\leq \text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) + \text{cat}_E(p^{-1}(A)). \end{aligned}$$

Искомое неравенство будет следовать из следующего неравенства:

$$\text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) + \text{cat}_E(p^{-1}(A)) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(\tilde{Y} \cup A) = k \cdot \text{cat}_E(F).$$

Так как $\text{cat}_E(p^{-1}(A)) \leq \text{cat}_E(F)$ (A стягивается по B в точку), то достаточно доказать более сильное неравенство $\text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) + \text{cat}_E(F) \leq \text{cat}_E(F) \cdot k$, т. е. $\text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) \leq \text{cat}_E(F) \cdot (k - 1)$. Это неравенство, в свою очередь, следует из еще более сильного неравенства: $\text{cat}_B(p^{-1}(\tilde{Y})) \leq \text{cat}_B(F) \cdot \text{cat}_B(\tilde{Y})$, так как $\text{cat}_B(\tilde{Y}) \leq k - 1$. Однако последнее неравенство можно считать выполненным в силу предположения индукции, где индукция ведется по $\text{cat}_B(Y)$ (первый шаг индукции $\text{cat}_B(Y) = 1$ был разобран ранее). Утверждение доказано.

Существуют расслоения $p: E \xrightarrow{p} B$, для которых неравенство $\text{cat}(E) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}(B)$ превращается в равенство. Например, рассмотрим расслоение Хопфа: $p: S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$; тогда $2 = 1 \cdot 2$, где $\text{cat}(S^3) = 2$, $\text{cat}(S^2) = 2$, $\text{cat}_{S^1}(S^1) = 1$ (так как слой S^1 стягивается по S^3 в точку).

§ 20. Критические многообразия и неравенства Морса. Функции с симметрией

Важным случаем вырожденных критических точек гладких функций f на многообразии M^n являются так называемые «невырожденные критические многообразия». Это означает следующее: а) уравнение $\text{grad } f = 0$ должно задавать набор гладких подмногообразий $W_k \subset M^n$ размерностей α_k ; б) требуется дополнительно, чтобы дифференциал d^2f в любой точке подмногообразия W_k был квадратичной формой ранга $n - \alpha_k$, т. е. форма d^2f должна быть невырождена на линейном пространстве векторов, нормальных к W_k в M^n в некоторой римановой (положительной) метрике.

Функции такого типа естественно возникают в случае, если на многообразии действует группа Ли, и функция инвариантна относительно преобразований группы. Другой пример дают функции f , полученные из многообразий меньших размерностей при отображении $M^n \xrightarrow{\psi} M^{n-q}$, как функции вида $f(x) = g(\psi(x))$ для функций Морса $g(x)$ на многообразии M^{n-q} , если ранг $\psi = n - q$.

Определение 1. Индексом связного критического многообразия W_k называется число λ отрицательных квадратов формы d^2f (которое не зависит от точки из W_k в силу невырожденности формы d^2f на нормальной плоскости).

Как и в § 16 этой главы, основными инвариантами критического многообразия являются (предполагая, что на одном уровне

находится лишь одно связное критическое многообразие) локальные числа Бетти — ранги относительных гомологий

$$b_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j) = \text{ранг } H_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j),$$

где M_a — область меньших значений $f(x) < a$; W_j — критическое многообразие на уровне $f(x) = a_j$. Как и в § 16, мы имеем

$$b_k(M_{a_j+\varepsilon}, M_{a_j-\varepsilon}) = b_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j),$$

если в интервале значений $[a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon]$ нет других критических точек, кроме W_j . Неравенства типа Морса уже выводились в § 16:

$$\sum_j b_k(M_{a_j+\varepsilon}, M_{a_j-\varepsilon}) \geq b_k(M^n).$$

В случае невырожденных критических многообразий эти неравенства становятся эффективными, если известна топология самих критических многообразий W_j и их индексы λ_j .

Теорема 1. а) Имеет место равенство

$$b_k(W_j) = b_{k+\lambda_j}(M_{a_j+\varepsilon}, M_{a_j-\varepsilon}) \quad (1)$$

(берутся числа Бетти по модулю 2).

б) Если многообразие M^n ориентируемо и критическое многообразие W_j односвязно, то равенство (1) верно для чисел Бетти с вещественными коэффициентами \mathbb{R} .

Для доказательства теоремы следует более четко представить топологическую картину, отвечающую критическому многообразию $W_j \subset M^n$. Достаточно малая ε -окрестность многообразия W_j , обозначаемая через $U(W_j)$, диффеоморфна нормальному расслоению (см. [1], ч. II, § 7) над

$$U(W_j) \xrightarrow{p} W_j$$

со слоем — диск $D^{n-\alpha_j}$ (радиуса ε). В каждом слое — нормальной плоскости $R_x^{n-\alpha_j}$ к любой точке $x \in W_j$ — квадратичная форма d^2f имеет положительное подпространство R_x^+ размерности a и отрицательное R_x^- размерности b , где $b = \lambda_j$ и $a + b = n - \alpha_j$. Мы имеем разложение нормального расслоения к W_j в прямую сумму

$$R_x^{n-\alpha_j} = R_x^+ \oplus R_x^-, \quad b = \lambda_j = \dim R_x^-.$$

Объединение областей радиуса ε вокруг нуля в каждом слое расслоения со слоем R_x^- мы обозначим через $U_-(W_j)$, а в расслоении со слоем R_x^+ — через $U^+(W_j)$. Имеем естественное вложение

$$U^-(W_j) \subset U^+(W_j) \subset M^n.$$

Искомое неравенство будет следовать из следующего неравенства:

$$\text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) + \text{cat}_E(p^{-1}(A)) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(\tilde{Y} \cup A) = k \cdot \text{cat}_E(F).$$

Так как $\text{cat}_E(p^{-1}(A)) \leq \text{cat}_E(F)$ (A стягивается по B в точку), то достаточно доказать более сильное неравенство $\text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) + \text{cat}_E(F) \leq \text{cat}_E(F) \cdot k$, т. е. $\text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) \leq \text{cat}_E(F) \cdot (k - 1)$. Это неравенство, в свою очередь, следует из еще более сильного неравенства: $\text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(\tilde{Y})$, так как $\text{cat}_B(\tilde{Y}) \leq k - 1$. Однако последнее неравенство можно считать выполненным в силу предположения индукции, где индукция ведется по $\text{cat}_B(Y)$ (первый шаг индукции $\text{cat}_B(Y) = 1$ был разобран ранее). Утверждение доказано.

Существуют расслоения $p: E \xrightarrow{p} B$, для которых неравенство $\text{cat}(E) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}(B)$ превращается в равенство. Например, рассмотрим расслоение Хопфа: $p: S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$; тогда $2 = 1 \cdot 2$, где $\text{cat}(S^3) = 2$, $\text{cat}(S^2) = 2$, $\text{cat}_{S^1}(S^1) = 1$ (так как слой S^1 стягивается по S^3 в точку).

§ 20. Критические многообразия и неравенства Морса. Функции с симметрией

Важным случаем вырожденных критических точек гладких функций f на многообразии M^n являются так называемые «невырожденные критические многообразия». Это означает следующее: а) уравнение $\text{grad } f = 0$ должно задавать набор гладких подмногообразий $W_k \subset M^n$ размерностей α_k ; б) требуется дополнительно, чтобы дифференциал d^2f в любой точке подмногообразия W_k был квадратичной формой ранга $n - \alpha_k$, т. е. форма d^2f должна быть невырождена на линейном пространстве векторов, нормальных к W_k в M^n в некоторой римановой (положительной) метрике.

Функции такого типа естественно возникают в случае, если на многообразии действует группа Ли, и функция инвариантна относительно преобразований группы. Другой пример дают функции f , полученные из многообразий меньших размерностей при отображении $M^n \xrightarrow{\psi} M^{n-q}$, как функции вида $f(x) = g(\psi(x))$ для функций Морса $g(x)$ на многообразии M^{n-q} , если ранг $\psi = n - q$.

Определение 1. Индексом связного критического многообразия W_k называется число λ отрицательных квадратов формы d^2f (которое не зависит от точки из W_k в силу невырожденности формы d^2f на нормальной плоскости).

Как и в § 16 этой главы, основными инвариантами критического многообразия являются (предполагая, что на одном уровне

находится лишь одно связное критическое многообразие) локальные числа Бетти — ранги относительных гомологий

$$b_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j) = \text{ранг } H_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j),$$

где M_a — область меньших значений $f(x) \leq a$; W_j — критическое многообразие на уровне $f(x) = a_j$. Как и в § 16, мы имеем

$$b_k(M_{a_j+\epsilon}, M_{a_j-\epsilon}) = b_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j),$$

если в интервале значений $[a_j - \epsilon, a_j + \epsilon]$ нет других критических точек, кроме W_j . Неравенства типа Морса уже выводились в § 16:

$$\sum_j b_k(M_{a_j+\epsilon}, M_{a_j-\epsilon}) \geq b_k(M^n).$$

В случае невырожденных критических многообразий эти неравенства становятся эффективными, если известна топология самих критических многообразий W_j и их индексы λ_j .

Теорема 1. а) Имеет место равенство

$$b_k(W_j) = b_{k+\lambda_j}(M_{a_j+\epsilon}, M_{a_j-\epsilon}) \quad (1)$$

(берутся числа Бетти по модулю 2).

б) Если многообразие M^n ориентируемо и критическое многообразие W_j односвязно, то равенство (1) верно для чисел Бетти с вещественными коэффициентами \mathbb{R} .

Для доказательства теоремы следует более четко представить топологическую картину, отвечающую критическому многообразию $W_j \subset M^n$. Достаточно малая ϵ -окрестность многообразия W_j , обозначаемая через $U(W_j)$, диффеоморфна нормальному расслоению (см. [1], ч. II, § 7) над

$$U(W_j) \xrightarrow{p} W_j$$

со слоем — диск $D^{n-\alpha_j}$ (радиуса ϵ). В каждом слое — нормальной плоскости $R_x^{n-\alpha_j}$ к любой точке $x \in W_j$ — квадратичная форма d^2f имеет положительное подпространство R_x^+ размерности a и отрицательное R_x^- размерности b , где $b = \lambda_j$ и $a + b = n - \alpha_j$. Мы имеем разложения нормального расслоения к W_j в прямую сумму

$$R_x^{n-\alpha_j} = R_x^+ \oplus R_x^-, \quad b = \lambda_j = \dim R_x^-.$$

Объединение областей радиуса ϵ вокруг нуля в каждом слое расслоения со слоем R_x^+ мы обозначим через $U_+(W_j)$, а в расслоении со слоем R_x^- — через $U^-(W_j)$. Имеем естественное вложение

$$U^-(W_j) \subset U^+(W_j) \subset M^n.$$

Ограничение функции f на $U^-(W_j)$ имеет максимум на самом $W_j \subset U^-(W_j)$, вложенном как нулевое сечение (0 в каждом слое R_x). Совершенно аналогично теореме из § 15 этой главы доказывается

Лемма 1. Для малого $\delta > 0$ многообразие $M_{a_j+\delta}$ стягивается к комплексу $M_{a_j-\delta} \cup_{\varphi} U^-(W_j)$, предполагая, что на уровнях $[a_j - \delta, a_j + \delta]$ нет других критических точек, кроме W_j . Склейка производится по отображению $\varphi: \partial U^-(W_j) \rightarrow \partial M_{a_j-\delta}$.

Доказательство леммы повторяет рассуждение из § 15. Вместо приклейки одной клетки σ^{λ_j} в изолированной невырожденной критической точке x_j индекса λ_j здесь приклеивается целое многообразие $U^-(W_j)$, представляющее, по определению, a_j -параметрическое (параметр — точка из W_j) семейство клеток σ^{λ_j} , где λ_j — индекс критического многообразия W_j . Лемма 1 из § 15 о возможности точного приведения (локально) функции f к квадратичному виду несущественна для результатов § 15. Более важно то, что в силу невырожденности формы d^2f топология поверхностей уровня функции f около критической точки определяется формой d^2f , что очевидно. В данном случае невырожденность формы d^2f на всех нормальных плоскостях к W_j обеспечивает все топологические свойства уровней функции f в области $U(W_j)$ полностью аналогично.

Граница $\partial U^-(W_j)$ представляет собой расслоение со слоем — сфера S^{2j-1} . Это — семейство границ клеток σ^{λ_j} , зависящее от параметра, где параметр пробегает все точки из W_j . Расслоения U^- и ∂U^- со слоями D^{λ_j} и S^{2j-1} могут быть нетривиальны. Если база W_j односвязна, то эти расслоения — ориентируемы (и само W_j ориентируемо в силу односвязности). Именно это и будет использовано при доказательстве п. б).

З а м е ч а н и е. Фактически можно просто в формулировке теоремы заменить требование п. б) на требование ориентируемости W_j и $U^-(W_j)$.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $U^-(W_j)$ — расслоение со слоем D^{λ_j} и базой W_j . Для относительных гомологий $(U^-, \partial U^-)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} H^{\lambda_j+q}(U^-, \partial U^-) &= H^q(W_j), \\ H_{\lambda_j+q}(U^-, \partial U^-) &= H_q(W_j). \end{aligned} \quad (2)$$

Если U^- и W_j ориентируемы, то равенство (2) верно и для $G = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$.

Доказательство. Мы имеем следующие изоморфизмы двойственности Пуанкаре (см. § 18):

1) $D_U: H^q(U^-) \cong H_{\alpha_j+\lambda_j-q}(U^-, \partial U^-)$ (см. задачу 4);

2) $D_W: H_q(W_j) \cong H^{\alpha_j-q}(W_j)$ (см. теорему 18.1) (размерность W_j есть α_j , размерность U^- есть $\alpha_j + \lambda_j$). Рассмотрим суперпозицию $D_U D_W$. Мы получаем изоморфизм:

$$D_U D_W: H_q(W_j) \cong H_{\lambda_j+q}(U^-, \partial U^-).$$

Лемма доказана, учитывая изоморфизм $H_*(U^-) \cong H_*(W_j)$.

Из теоремы 4 § 5 мы получаем («теорема факторизации» или «вырезания»):

$$H_*(M_{a_j-\delta} \cup_{\varphi} U^-, M_{a_j-\delta}) = H_*(U^-, \partial U^-).$$

Так как $H_*(M_{a_j-\delta}, M_{a_j-\delta}) = H_*(U^-, \partial U^-)$, мы из лемм получаем и доказательство теоремы.

П р и м е р 1. Пусть задана поверхность M^2 вращения в \mathbb{R}^3 вокруг оси z и f — функция высоты (координата z на M^2). Критические многообразия W_j — это окружности S^1 , где $\alpha_j = 1$. Число λ_j либо 0 (локальный минимум), либо 1 (локальный максимум). Могут быть такие изолированные критические точки (локальные минимумы или максимумы), если они лежат на самой оси z .

П р и м е р 2. Рассмотрим расслоения с базой — сфера S^n вида (см. [1], ч. II, § 24):

- 1) $SO(n+1) \xrightarrow{\rho} S^n$ (слой $SO(n)$);
- 2) $U(n) \xrightarrow{\rho} S^{2n-1}$ (слой $U(n-1)$);
- 3) $Sp(n) \xrightarrow{\rho} S^{4n-1}$ (слой $Sp(n-1)$).

На сфере S^n, S^{2n-1}, S^{4n-1} возьмем функцию $g(x)$ с одним минимумом x_0 и одним максимумом x_1 . На пространствах расслоений 1), 2), 3) возникает функция

$$f(x) = g(\rho(x)).$$

Мы будем иметь два критических многообразия для f вида $W_0 = p^{-1}(x_0)$ и $W_1 = p^{-1}(x_1)$ индексов $\lambda_1 = n$ (или $2n-1, 4n-1$ соответственно) и $\lambda_0 = 0$ (максимум). Из теоремы 1 получаем:

$$\begin{aligned} b_j(SO(n+1)) &\leq b_{j-n}(SO(n)) + b_j(SO(n)); \\ b_j(U(n)) &\leq b_{j-(2n-1)}(U(n-1)) + b_j(U(n-1)); \\ b_j(Sp(n)) &\leq b_{j-(4n-1)}(Sp(n-1)) + b_j(Sp(n-1)). \end{aligned} \quad (3)$$

Проверьте, что здесь все ориентируемо (см. замечания к доказательству теоремы выше), и неравенства (3) применимы не только для $G = \mathbb{Z}_2$, но и для $G = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$.

Задача 1. Докажите, что неравенства (3) являются равенствами при $j < n$ для $SO(n+1)$, $j < 2n-1$ для $U(n)$ и $j < 4n-1$ для $Sp(n)$.

Из более точных результатов § 7 следует, что для U и Sp неравенства (3) являются равенствами для всех j . Более трудная задача: неравенства (3) являются равенствами для SO при $G = \mathbb{Z}_2$ (всегда) и при $G = \mathbb{R}$ (для нечетных n).

Пример 3. Рассмотрим однородное риманово пространство M^n с группой движений D , где $M^n = D/H$, H — стационарная подгруппа точки $x_0 \in M^n$, $Hx_0 = x_0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \rho^2(x, x_0)$, где $\rho(x, x_0)$ — риманово расстояние от точки x до точки x_0 . Очевидно, функция $f(x)$ инвариантна относительно группы H : $f(Hx) = f(x)$.

Задача 2. Изучить критические многообразия функции $f(x) = \rho^2(x, 1)$ для $M^n = SO(n)$ или $U(n)$, $Sp(n)$. Здесь группа $D = SO(n) \times SO(n)$ для двусторонне инвариантной метрики ρ .

$$D: x \rightarrow g_1 x g_2^{-1}, \quad (g_1, g_2) \in D.$$

Функция $f(x)$ инвариантна относительно преобразований подгруппы $H = SO(n) = \langle g, g \rangle \subset D$, так как при $x_0 = 1$ имеем $gx_0 g^{-1} = x_0$. Тем самым функция $\rho^2(x, 1) = f(x)$ инвариантна относительно внутренних автоморфизмов $f(gxg^{-1}) = f(x)$.

Пример 4. Пусть Q — группа Ли и $T: Q \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ — ее матричное представление. Характер имеет вид $f(x) = \chi_T(x) = Sp(Tx)$, $x \in Q$.

Характер $\chi_T(x) = f(x)$ дает другой пример функции, инвариантной относительно внутренних автоморфизмов $f(gxg^{-1}) = f(x)$.

Задача 3. Изучить критические многообразия функции $f(x)$ для $Q = SO(n)$ или $U(n)$, $Sp(n)$ и их неприводимых представлений. Рассмотрите случаи $Q = SO(3)$, $SO(4)$, $SU(3)$. Для группы $SO(2)$ все нетривиальные вещественные неприводимые представления двумерны и имеют вид

$$T_n(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos(n\varphi) & \sin(n\varphi) \\ -\sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{vmatrix},$$

$$f_n(\varphi) = \chi_T(\varphi) = 2 \cos(n\varphi).$$

Рассматривая задачи из примеров 3 и 4, полезно сначала разобраться, какие орбиты имеет группа внутренних автоморфизмов для $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$. Для группы $SO(3)$ и группы $SU(2) = Sp(1)$ дело обстоит просто.

Задача 4. Докажите, что все орбиты группы внутренних автоморфизмов есть S^1 кроме центра (центр равен 1 для $SO(3)$ и равен $(1, -1)$ для $SU(2) = Sp(1)$). Орбита точки из центра одноточечна.

Для группы $U(n)$ каждая матрица $A \in U(n)$ внутренним автоморфизмом $A \rightarrow gAg^{-1}$ для $g \in U(n)$ может быть диагонали-

зована. Для диагональных матриц все зависит, очевидно, от количества различных совпадающих собственных значений.

Пусть матрица разложена на блоки вида

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_2 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & \lambda_k \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & \lambda_k \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где $\lambda_j = \exp(2\pi i \varphi_j)$ и λ_j встречается l_j раз, $l_1 + \dots + l_k = n$.

Задача 5. Докажите, что орбита gAg^{-1} матрицы A вида (4) такова: $U(n)/U(l_1) \times \dots \times U(l_k)$.

Орбиту общего положения мы получим, когда все собственные числа различны $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_k$. В этом случае $U(l_j) = U(1) = S^1$, и орбита имеет вид

$$U(n)/U(1) \times \dots \times U(1) = U(n)/T^n.$$

Таким образом, в этих примерах мы имеем функции с непрерывной симметрией — группой Q преобразований $M^n \rightarrow M^n$, оставляющей функцию f неизменной: $f(gx) = f(x)$. Различные орбиты группы недиффеоморфны друг другу; поэтому факторпространство $M \xrightarrow{\rho} M/Q$ не является многообразием. Хотя функция $f(x)$ получается как $f(x) = \varphi(rx)$ из некоторой функции φ на M/Q , но пользоваться неравенствами типа Морса на M/Q нельзя, поскольку это пространство — не многообразие.

Пример 5. Интересный класс примеров такого рода с дискретной группой Q мы получаем из так называемых кристаллографических групп — см. [1], ч. I, § 20. Пусть K — некоторая дискретная подгруппа связной части группы движений G_4 евклидова пространства \mathbb{R}^n (кристаллографическая группа для $n = 3$). Согласно известной теореме (см. [1], ч. I, § 20), в группе K имеется нормальный делитель N конечного индекса, состоящий из трансляций. Группа G_4 есть полуправильное произведение $SO(n)$

на \mathbb{R}^n , причем трансляции $\mathbb{R}^n \subset G_n$ есть нормальный делитель, а $SO(n) = G_n/\Gamma^n$ (см. [1], ч. I, § 4). Дискретная подгруппа $K \subset G$, и ее нормальный делитель $N \subset \mathbb{R}^n$, где $N = K \cap \mathbb{R}^n$, определяют конечную факторгруппу $D_h = K/N$, представляющую все вращения вокруг разных точек из \mathbb{R}^n , имеющиеся в K . Мы имеем компактное многообразие — тор $T^n = \mathbb{R}^n/N$ (N — свободная абелева ранга n) и действие конечной группы D_h на торе T^n : $g(x) = gxg^{-1} \pmod{N}$ для $g \in K$.

Любой функции f на \mathbb{R}^n , инвариантной относительно кристаллографической группы $K = G_n$, соответствует (та же самая) функция, рассматриваемая на торе $T^n = \mathbb{R}^n/N$, обозначаемая через $f(y)$, $y \in T^n$. При этом функция $f(y)$ на торе T^n инвариантна относительно преобразований из конечной группы D_h . Мы приходим к следующей задаче: имеется компактное риманово пространство M^n , конечная группа движений $D: M^n \rightarrow M^n$ и функция Морса $f(x)$ на M^n , инвариантная относительно группы D . Как можно уточнить неравенства Морса для данной ситуации?

Л е м м а 3. Пусть $W_d \subset M^n$ — подмногообразие в M^n , состоящее из целой связной компоненты множества всех неподвижных точек элемента $d \in D$, $d \neq 1$. Ограничим функцию f на W_d . Если точка $x_0 \in W_d$ является критической для f на W_d , то эта же точка является критической и для f на всем M^n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\xi(x) = \text{grad } f(x)$ как вектор в M^n , используя метрику. Из инвариантности метрики относительно движений группы D следует, что преобразование $d \in D$ переводит вектор $\xi(x) = \text{grad } f(x)$ в вектор $\text{grad } f(dx)$: $\xi(x) \rightarrow \xi(dx)$. Если $x \in W_d$, то $x = dx$. Разложим вектор $\xi(x)$ в сумму $\xi_1 + \xi_2 = \xi$, где ξ_1 касателен к W_d , а ξ_2 нормален к W_d . Очевидно, $d: \xi_1 \rightarrow \xi_1$. Напротив, $d(\xi_2) \neq \xi_2$, если $\xi_2 \neq 0$. Иначе многообразие W_d не исчерпывало бы всей связной компоненты множества неподвижных точек элемента $d \in D$ — оно расширялось бы по направлению вектора ξ_2 . Тем самым вектор $\xi(x) = \xi_1(x) = \text{grad } f(x)$ касателен к W_d . Лемма доказана.

Уточнение неравенств Морса при исследовании конкретного многообразия (M^n, D) и функции f требует знания неподвижных многообразий для разных d и гомоморфизма вложения их гомологий в M^n . В частности, если x_0 — изолированная неподвижная точка элемента $d \in D$, то точка x_0 является критической точкой функции $f(x)$ на M^n .

Рассматривая один элемент $d \in D$, $d \neq 1$, мы имеем неподвижное многообразие W_d . В силу неравенств Морса для W_d мы имеем для $f_{W_d} = f/W_d$:

$$\sum \mu_k(f_{W_d}) \geq \sum b_k(W_d).$$

Заметим, что индексы критической точки на W_d и на M^n могут не совпадать. Даже для циклической группы D порядка m с обра-

зующей d неравенства Морса могут быть улучшены, если знать вложение

$$W_d \subset W_{d^2} \subset \cdots \subset M^n = W_{d^m}, \quad d^m = 1.$$

Особый пример мы получим в случае, если $D = \mathbb{Z}_2$, и неподвижное многообразие W_d элемента $d \neq 1$ имеет размерность $n - 1$ и разделяет многообразие M^n на две диффеоморфные части $M^n = M_1 \cup M_2$, где $\partial M_1 = \partial M_2 = W_d$. Действие элемента d таково:

$$d: M_1 \rightarrow M_2,$$

$$d: M_2 \rightarrow M_1, \quad d/\partial M_1 \equiv d/\partial M_2 \equiv 1.$$

Рассмотрим точную последовательность пары (M, W) :

$$\xrightarrow{i_*} H_{q+1}(M, W) \xrightarrow{\partial} H_q(W) \xrightarrow{i_*} H_q(M_1) \xrightarrow{\partial} H_q(M_1, W) \xrightarrow{\partial}.$$

Определим числа

$$b_k(M_1, W) = b_k(M_2) - \text{ранг}(H_k(M_1, W), \text{Im } j_*).$$

Задача 6. Докажите, что число критических точек функции f индекса k на M_1 (включая W) не менее, чем $b_k(M_1, W)$.

§ 21. Критические точки функционалов и топология пространства путей ΩM

Естественный аналог теории Морса и Люстерника—Шнирельмана возникает на бесконечномерных гладких многообразиях M^∞ . Одним из таких «многообразий» является, например, пространство кусочно-гладких путей $\Omega(M, p, q)$, идущих на конечномерном многообразии M от точки p до точки q . На многообразии M^∞ можно рассмотреть функцию $F(\gamma)$, где $\gamma \in M^\infty$. Такие функции обычно называются функционалами. Понятие «критической точки» γ_0 для $F(\gamma)$ естественно, но «индекс критической точки» нуждается в обосновании.

Мы не будем здесь знакомиться с теорией бесконечномерных многообразий и ограничимся пространством путей $\Omega(p, q, M)$ из точки p в точку q .

Пусть $p, q \in M$ — две фиксированные точки, $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ — кусочно-гладкий путь, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, т. е. существует подразделение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$ такое, что $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ ($0 \leq i \leq k - 1$) — гладкое отображение, а в целом γ непрерывно. Множество всех таких путей обозначим через $\Omega(M, p, q)$. Кусочная гладкость (а не гладкость) рассматриваемых траекторий $\gamma(t)$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ оказывается технически полезной при доказательстве теоремы о разложении пространства Ω в сумму «клеток», по аналогии с тем, как это происходило в конечномерном случае. С каждой точкой $\gamma \in \Omega(M, p, q)$ мы свяжем некоторое бесконечномерное линейное простран-

ство $T_y\Omega$, которое можно естественно представлять себе как «касательное пространство» к Ω в «точке» $y \in \Omega$.

Определение 1. Касательным пространством $T_y\Omega$ к Ω в точке y назовем линейное пространство всех кусочно-гладких векторных полей v вдоль пути y , для которых $v(0) = 0, v(1) = 0$.

Вариацией по параметру u , $-\varepsilon < u < \varepsilon$, пути y , оставляющей точки p и q неподвижными, назовем отображение отрезка $\tilde{\alpha}$: $(-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \Omega$ ($\varepsilon > 0$ — достаточно мало) такое, что $\tilde{\alpha}(0) = y$; существует подразделение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, для которого $\alpha(u, t)$, определенное формулой $\alpha(u, t) = \tilde{\alpha}(u)(t)$, на каждой полосе $t_i < t < t_{i+1}$ является гладким отображением в M (см. рис. 96).

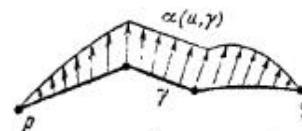


Рис. 96.



Рис. 97.

Так как при каждом фиксированном u ($-\varepsilon < u < \varepsilon$) мы получаем кусочно-гладкий путь $\tilde{\alpha}(u)(t)$, то $\tilde{\alpha}$ можно рассматривать как траекторию в пространстве Ω (см. рис. 97). Поэтому можно рассмотреть вектор скорости траектории $\tilde{\alpha}(u)$ в точке $y = \tilde{\alpha}(0)$. По определению, положим: $v = \frac{d\tilde{\alpha}}{du}(0, t)$, поле $v = v(t)$ является кусочно-гладким векторным полем вдоль $y(t)$ и, следовательно (по определению касательного пространства $T_y\Omega$), принадлежит $T_y\Omega$. Легко проверить и обратное: если задано произвольное поле $v \in T_y\Omega$ (т. е. поле $v(t)$ вдоль $y(t)$), то всегда существует траектория $\tilde{\alpha}(u) \in \Omega$ такая, что $\frac{d}{du}\tilde{\alpha}(0, t) = v(t)$. Поле $v(t)$ в вариационном исчислении обычно обозначается через δy .

Пусть $F(y)$ — вещественнозначная функция на Ω . Рассмотрим путь $y \in \Omega$ и поле $v = \delta y \in T_y\Omega$. Рассмотрим производную $\frac{d}{du}F(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0}$, предположив, что эта производная существует. В тех конкретных примерах функционалов $F(y)$, с которыми мы будем иметь дело, существование производной будет очевидно. Отметим, что данное выше определение производной $\frac{d}{du}F(\tilde{\alpha}(u))$ в точности скопировано с «конечномерного» определения производной по направлению от гладкой функции на конечномерном многообразии. Следуя и далее этой аналогии, дадим определение критического пути для $F(y)$. Будем говорить, что путь $y_0 \in \Omega$ критический для $F(y)$, если $\frac{d}{du}F(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$ для любой

вариации $\tilde{\alpha}(u)$ пути y_0 (или вариационная производная $\frac{\delta F}{\delta y}$ равна нулю).

Сейчас нас будут интересовать совершенно конкретные функционалы на Ω . Это — действие пути: $E(y) = \int_0^1 \left| \frac{dy}{dt} \right|^2 dt$ и

длина пути: $L(y) = \int_0^1 \left| \frac{dy}{dt} \right| dt$, уже изучавшиеся в книге [1]

(см. [1], ч. I, гл. 5). При этом мы считаем, что M — риманово многообразие. Между функционалами L и E существует следующая связь: $L^2 \leq E$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $|y'| \equiv \text{const}$, т. е. параметр t (на $y(t)$) пропорционален длине дуги (натуральному параметру).

Напомним теперь некоторые сведения о вариационных производных функционалов $L(y)$ и $E(y)$. Пусть $\tilde{\alpha}(u)$ — вариация пути y ; $v = v(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$ — векторное поле δy вариации $\tilde{\alpha}(u)$ (вдоль $\tilde{\alpha}(t)$); $\dot{y}(t)$ — вектор скорости траектории $y(t)$; $a(t) = -V_y(\dot{y})$ — вектор ускорения траектории, $\Delta\dot{y}(t) = \dot{y}(t^*) - \dot{y}(t)$, т. е. скачок вектора скорости в точке t . Справедлива следующая теорема (формула первой вариации) — см. [1], ч. I, § 31.

Теорема 1. Имеет место равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} = - \sum_{(t)} \langle v(t), \Delta\dot{y}(t) \rangle - \int_0^1 \langle v(t), a(t) \rangle dt,$$

где $a(t)$ — вариационная производная функционала E — гладкая функция.

В силу кусочной гладкости пути $y(t)$ имеем: $\Delta\dot{y}(t) = 0$ для всех t , кроме конечного числа значений t (точек разрыва производной).

Как мы уже отмечали ранее, из формулы первой вариации следует утверждение.

Теорема 2. $y_0 \in \Omega$ является критической точкой для функционала $E(y)$ тогда и только тогда, когда y_0 — геодезическая.

В самом деле, если $y_0(t)$ — геодезическая, то $\Delta\dot{y}(t) \equiv 0$; $a(t) \equiv 0$, т. е. $\frac{d}{du}E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$. Обратно: пусть

$\frac{d}{du}E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$ для любой вариации $\tilde{\alpha}(u)$ пути $y_0(t)$. Рассмотрим вдоль $y_0(t)$ векторное поле $v(t) = g(t) \cdot a(t)$, где функция $g(t) \geq 0$, причем $g(t) = 0$ только в тех точках $t_i \in [0, 1]$, в которых $\Delta\dot{y}(t_i) \neq 0$. Итак:

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} = - \int_0^1 \langle a(t), a(t) \rangle g(t) dt,$$

т. е. $a(t) \equiv 0$ вдоль $\gamma_0(t)$. Так как $a(t) = \nabla_{\dot{\gamma}_0}(\dot{\gamma}_0)$, то это означает, что каждый гладкий отрезок траектории $\gamma_0(t)$ является геодезической. Выберем теперь $\tilde{a}(u)$ так, чтобы $v(t_i) = \Delta \dot{\gamma}(t_i)$; тогда

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\tilde{a}(u))|_{u=0} = - \sum_{(t_i)} \langle \Delta \dot{\gamma}(t_i), \Delta \dot{\gamma}(t_i) \rangle,$$

т. е. $\Delta \dot{\gamma}(t_i) = 0$ для всех i , а потому $\gamma_0(t)$ — гладкая траектория (не имеет точек излома). Теорема доказана.

Напомним теперь формулу второй вариации (см. [1], ч. I, § 36) для функционала E . Пусть $v_1, v_2 \in T_{\gamma}\Omega$ — два векторных поля.

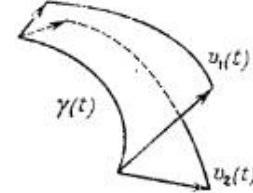


Рис. 98.

Рассмотрим двупараметрическую вариацию $\alpha: U \times [0, 1] \rightarrow M$, где $U(u_1, u_2)$ — открытая окрестность точки $(0, 0) \in \mathbb{R}^2(u_1, u_2)$; $t \in [0, 1]$; $\alpha(0, 0, t) = \gamma(t)$; $\frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0, 0, t) = v_1(t)$; $\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0, 0, t) = v_2(t)$. Легко проверить, что для любой пары полей $v_1, v_2 \in T_{\gamma}\Omega$ такая вариация существует (см. рис. 98).

Гессианом функционала E в критической точке $\gamma_0(t) \in \Omega$ назовем выражение вида:

$$d^2E(v_1, v_2) = \frac{\partial^2 E(\tilde{a}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{u_1=u_2=0}.$$

Здесь $\tilde{a}(u_1, u_2)(t) = \alpha(u_1, u_2, t)$. Справедлива следующая формула второй вариации функционала E (см. [1], ч. I, § 36).

Теорема 3. Пусть $\gamma_0 \in \Omega$ — геодезическая (т. е. критическая точка для $E(\gamma)$) и $\tilde{a}(u_1, u_2)$ — двупараметрическая вариация пути γ_0 ; $v_i = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial u_i}(0, 0)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(\tilde{a})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) &= - \sum_{(t_i)} \langle v_2(t_i), \Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t_i)) \rangle - \\ &\quad - \int_0^1 \langle v_2(t), \nabla_{\dot{\gamma}_0} \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t) + R(\dot{\gamma}_0, v_1) \dot{\gamma}_0 \rangle dt, \end{aligned}$$

где $\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t)) = \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t^+) - \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t^-)$ — скачок производной $\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t)$ в одной из ее точек разрыва; R — тензор кривизны.

Выше было показано, что геодезические $\gamma_0(t)$ не имеют точек излома, а потому можно ограничиться вариациями \tilde{a} , для которых $v_1(t)$ и $v_2(t)$ не имеют точек излома. Тогда:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(\tilde{a})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = - \int_0^1 \langle v_2, \nabla_{\dot{\gamma}_0} \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1 + R(\dot{\gamma}_0, v_1) \dot{\gamma}_0 \rangle dt.$$

Напомним, что векторное поле $v(t)$ вдоль геодезической γ_0 называется якобиевым, если оно удовлетворяет дифференциальному уравнению Якоби: $(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v) \dot{\gamma}_0 = 0$ (см. [1], ч. I, § 36). Это уравнение удобно записывать в координатах в следующем базисе: выберем вдоль $\gamma_0(t)$ n ортос нормальных (для каждого t) параллельных вдоль γ_0 векторных полей: $e_1(t), \dots, e_n(t)$ (т. е. $\nabla_{\dot{\gamma}_0} e_\alpha(t) \equiv 0$). Тогда $v(t) = v^i e_i(t)$, и мы получим:

$$\frac{d^2 v^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^n R_j^i(t) v^j(t) = 0, \quad \text{где } R_j^i(t) = \langle R(\dot{\gamma}_0, e_j) \dot{\gamma}_0, e_i \rangle.$$

Таким образом, якобиево поле (как решение этой системы) однозначно определяется следующими начальными данными: $v(0)$, $\nabla_{\dot{\gamma}_0} v(0) \in T_{\gamma_0(0)}(M^n)$. Напомним теперь определение сопряженных точек вдоль геодезической $\gamma_0(t)$. Пусть для пары точек $A, B \in \gamma_0(t)$ существует неицлевое якобиево поле $v(t)$ вдоль $\gamma_0(t)$ такое, что $v|_A = v|_B = 0$ (т. е. поле $v(t)$ обращается в нуль в точках A и B). Тогда точки A и B называются сопряженными вдоль геодезической γ_0 . Кратностью пары сопряженных точек $A, B \in \gamma_0$ (вдоль γ_0) называется размерность линейного пространства всех таких якобиевых полей (вдоль γ_0).

Рассмотрим $d^2E(v_1, v_2)$; пусть $W_{\gamma_0} \subset T_{\gamma_0}\Omega$ — линейное подпространство в $T_{\gamma_0}\Omega$, состоящее из всех тех векторных полей v_1 таких, что $d^2E(v_1, v_2) \equiv 0$ для любого $v_2 \in T_{\gamma_0}\Omega$. Подпространство W_{γ_0} иногда называется нулевым подпространством гессиана d^2E в точке $\gamma_0 \in \Omega$, или ядром гессиана d^2E . Степенью вырождения гессиана d^2E называется $\dim W_{\gamma_0}$ (в критической точке $\gamma_0 \in \Omega$).

Теорема 4. Пусть γ_0 — геодезическая на M из точки p в точку q ; тогда $v \in W_{\gamma_0}$ (т. е. принадлежит ядру гессиана d^2E) в том и только в том случае, когда v — якобиево поле вдоль γ_0 (в частности, $v|_p = v|_q = 0$).

Таким образом, ядро W_{γ_0} гессиана d^2E отлично от нуля тогда и только тогда, когда концы p и q геодезической γ_0 сопряжены вдоль γ_0 . Размерность ядра W_{γ_0} (т. е. степень вырождения гессиана d^2E) равна кратности сопряженных точек p и q вдоль γ_0 .

Доказательство. Пусть v — якобиево поле вдоль γ_0 такое, что $v|_p = v|_q = 0$. Тогда $v \in T_{\gamma_0}\Omega$. Так как γ_0 — гладкая траектория, то $\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v(t)) = 0$ (нет изломов). Так как $v(t)$ — якобиево поле, то $(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v(t) + R(\dot{\gamma}_0, v) \dot{\gamma}_0 \equiv 0$ и, следовательно, из формулы второй вариации функционала E получаем:

$$d^2E(v, v) = \sum_{(t)} \langle \tilde{v}(t), 0 \rangle + \int_0^1 \langle \tilde{v}(t), 0 \rangle dt \equiv 0.$$

Итак, $v \in W_{\gamma_0}$ (ядру d^2E). Обратно: пусть $v \in W_{\gamma_0}$. Требуется доказать, что $v(t)$ — якобиево поле вдоль $\gamma_0(t)$. Так как поле $v(t)$ кусочно-гладкое, то отрезок $[0, 1]$ можно разбить конечным числом точек $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ на интервалы (t_{i-1}, t_i) , на которых поле $v(t)$ гладко. Как и раньше, построим гладкую функцию $f(t)$ на $[0, 1]$, равную нулю в точках $\{t_i, 0 < i < k\}$ и положительную во всех остальных точках. Рассмотрим поле $q = f((\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0)$. Подставляя его в d^2E , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) &= d^2E(v, q) = \\ &= - \sum_{(i)} \langle q, \Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v) \rangle - \int_0^1 f \cdot |(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0|^2 dt = 0. \end{aligned}$$

Так как $q(t_i) = 0$, $0 < i < k$, то первое слагаемое равно нулю, и поскольку $f(t) > 0$ при $t \neq t_i$, $0 < i < k$, то $(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 \equiv 0$ на каждом интервале $[t_{i-1}, t_i]$. Таким образом, v — якобиево поле вдоль каждого интервала $[t_{i-1}, t_i]$. Докажем, что v — якобиево поле вдоль всей траектории γ_0 . Для этого достаточно доказать, что $\nabla_{\dot{\gamma}_0} v$ не имеет точек разрыва на отрезке $[0, 1]$. В самом деле, допустим противное: пусть $\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v)_{t_i} = \nabla_{\dot{\gamma}_0} v(t_i) - \nabla_{\dot{\gamma}_0} v(t_i^-)$ — скачки в точках t_i ; тогда можно рассматривать векторное поле $g(t)$ вдоль $\gamma_0(t)$ такое, чтобы $g(t_i) = \Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v)_{t_i}$. Тогда получаем:

$$\frac{1}{2} d^2E(v, g) = \sum_{i=1}^{k-1} |\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v)_{t_i}|^2 + \int_0^1 \langle g, (\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 \rangle dt = 0$$

в силу того, что $v \in \text{Ker}(d^2E)$. Второе слагаемое в этой сумме равно нулю (см. выше), а потому $\sum |\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v)_{t_i}|^2 = 0$, т. е. $\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v)_{t_i} = 0$ при всех i . Итак, $\nabla_{\dot{\gamma}_0} v$ не имеет точек разрыва, и, следовательно, v — якобиево поле вдоль всей траектории γ_0 .

З а м е ч а н и е. Размерность ядра гессиана d^2E всегда конечна, так как она равна числу линейно независимых якобиевых полей вдоль γ_0 (аннулирующихся в точках p и q).

Среди различных вариаций траекторий γ_0 выделен класс так называемых геодезических вариаций, т. е. таких гладких отображений $\alpha: (-\varepsilon, +\varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$, при которых $\alpha(0, t) = \gamma_0(t)$ и каждая траектория $\tilde{\alpha}(u)$ (напомним, что $\tilde{\alpha}(u)(t) = \alpha(u, t)$) является геодезической (т. е. в процессе возмущения геодезической γ возмущенные траектории по-прежнему остаются геодезическими). Рассмотрим «вектор скорости» таких траекторий $\tilde{\alpha}$ в пространстве Ω , т. е. — векторное поле $\frac{d\alpha}{du}$ вдоль γ_0 . Мы утверждаем, что это поле якобиево вдоль γ_0 .

Действительно, так как все траектории $\tilde{\alpha}(u)$ — геодезические, то $\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) = 0$; следовательно, равно нулю следующее выражение:

$$\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial u}} \left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \right) = \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial u}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \right) + R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Так как $\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial u}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) = \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)$, то

$$\left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \right)^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) + R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0,$$

т. е. поле $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ — якобиево поле.

! Верно и обратное: любое якобиево поле вдоль геодезической γ_0 можно получить с помощью некоторой геодезической вариации. В самом деле, предположим сначала, что геодезическая γ_0 соединяет две достаточно близкие точки p' и q' , расположенные в некотором диске $D^n \subset M^n$ достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$. Тогда можно считать, что любая пара точек $\alpha, \beta \in D^n$ соединяется единственной геодезической, содержащейся в области D^n . Докажем

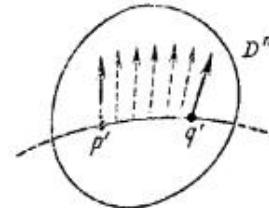


Рис. 99.

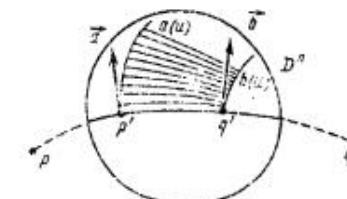


Рис. 100.

сначала существование якобиева поля вдоль γ_0 (от p' до q'), имеющего в точках p' и q' произвольные заданные значения (см. рис. 99). Рассмотрим в точках p' и q' произвольные касательные к M векторы a и b и построим якобиево поле вдоль γ_0 с начальными данными: a в точке p' и b — в точке q' . Через точку p' проведем гладкую кривую $a(u)$ такую, что $\frac{da(0)}{du} = a$; аналогично — через точку q' проведем траекторию $b(u)$ такую, чтобы $\frac{db(0)}{du} = b$. Искомое семейство геодезических мы получим, соединив геодезическими точками $a(u)$ и $b(u)$ (такая геодезическая единственна). Меняя u , получаем искомое возмущение геодезической γ_0 от точки p' до точки q' с заданными начальными значениями a и b (см. рис. 100). Искомое якобиево поле вдоль γ_0 от p' до q' получается дифференцированием по параметру u построенной

выше геодезической вариации. Так как якобиево поле однозначно определяется своими значениями в точках p' и q' , то любое якобиево поле вдоль γ_0 от точки p' до точки q' можно получить указанным способом. Отметим, что линейное пространство всех якобиевых полей вдоль γ_0 от p' до q' изоморфно $(2n)$ -мерному линейному пространству: $T_{p'}(M^n) \times T_{q'}(M^n)$. Вообще, очевидно, верно и более общее утверждение: якобиево поле вдоль геодезической γ_0 от точки p до точки q (где p и q — не обязательно близки) однозначно определяется своими двумя значениями в двух несопряженных (вдоль γ_0) точках.

Докажем теперь существование геодезической вариации, порождающей заданное якобиево поле v уже на всей геодезической γ_0 от p до q . Для этого рассмотрим пару точек $p', q' \in \gamma_0$, расположенных внутри достаточно малого шара D^n , и зададим в точках p' и q' следующие векторы: $a = v|_{p'}, b = v|_{q'}$. Далее: строим геодезическую вариацию, порождающую якобиево поле v вдоль γ_0 от точки p' до точки q' (см. построение выше), и продолжаем построенное семейство геодезических за пределы диска D^n , что и дает искомую геодезическую вариацию уже вдоль всей геодезической γ_0 .

Изучим связь между сопряженными точками вдоль γ_0 и свойствами гессиана d^2E . Напомним, что индекс λ гессиана d^2E есть максимальная размерность подпространств в $T_{\gamma_0}\Omega$, на которых форма d^2E отрицательно определена. Имеет место следующее важное утверждение.

Теорема 5. Индекс квадратичной формы d^2E в критической точке $\gamma_0 \in \Omega$ равен числу точек на геодезической $\gamma_0(t)$, $0 < t < 1$, сопряженных вдоль $\gamma_0(t)$ начальной точке $p = \gamma_0(0)$ (каждая точка $\gamma_0(t)$, сопряженная с $\gamma_0(0) = p$, учитывается столько раз, какова ее кратность). Индекс $\lambda = \lambda(\gamma_0)$ всегда конечен.

Замечание. Если точки p и q не сопряжены вдоль γ_0 , то тогда можно рассматривать всю траекторию $\gamma_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$. В этом случае $\text{Ker}(d^2E) = 0$ и $\gamma_0 \in \Omega$ — невырожденная критическая точка индекса λ .

Из теоремы, в частности, вытекает, что каждый отрезок геодезической γ_0 содержит только конечное число точек, сопряженных с точкой $p = \gamma_0(0)$.

Прежде чем переходить к формальному доказательству теоремы, дадим наглядное пояснение, показывающее, что сопряженные точки определяют такие вариации $\tilde{\alpha}(u)$ в пространстве Ω , вдоль которых квадратичная часть функционала E убывает. Будем считать, что на многообразии M задана положительно определенная риманова метрика и V — риманова связность, согласованная с этой метрикой.

Пусть $x_0 \in \gamma_0$ — точка, сопряженная с $p = \gamma_0(0)$ вдоль $\gamma_0(t)$. Тогда вдоль отрезка $[p, x_0]$ геодезической γ_0 существует $\lambda(x_0)$

якобиевых полей ($\lambda(x_0) \geq 1$), анулирующихся в точках p и x_0 . (Эти поля могут, конечно, обращаться в нуль и в некоторых внутренних точках отрезка $[p, x_0]$.) Рассмотрим геодезическую вариацию $\tilde{\alpha}(u)$ отрезка $[p, x_0]$ в направлении какого-либо якобиева поля вдоль $[p, x_0]$, анулирующегося в p и x_0 . Это означает, что существует бесконечно малое «вращение» геодезической $[p, x_0]$, оставляющее неподвижными точки p и x_0 (см. рис. 101).



Рис. 101.

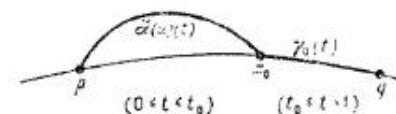


Рис. 102.

Рассмотрим геодезические $\tilde{\alpha}(u)(t)$, определяющие эту геодезическую вариацию, $0 \ll u \ll t_0$, где t_0 соответствует точке $x_0 \in \gamma_0$. Тогда можно рассмотреть следующий гладкий путь $\tilde{\phi}(u)$ в пространстве Ω : $\tilde{\phi}(u)(t) = \tilde{\alpha}(u)(t)$ при $0 \ll u \ll t_0$; $\tilde{\phi}(u)(t) = \gamma_0(t)$ при $t_0 \ll u \ll 1$ (см. рис. 102).

В силу выбора $\tilde{\phi}(u)$ можно считать, в первом приближении, что длина γ_0 от p до q равна длине $\tilde{\alpha}(u)(t)$ от p до x_0 плюс длина γ_0 от x_0 до q , т. е. можно считать, что функционал E не меняется при достаточно малом смещении вдоль траектории $\tilde{\phi}(u)$, $0 \ll u \ll e$.



Рис. 103.

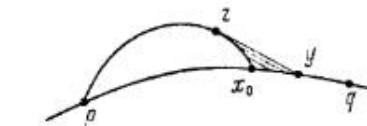


Рис. 104.

Так как якобиево поле полностью определяется своими начальными данными, то в точке x_0 угол между векторами скоростей траектории γ_0 и траектории $\tilde{\alpha}(u)(t)$ отличен от нуля (см. рис. 103).

Теперь мы построим новую траекторию $\tilde{\phi}(u)$ в пространстве Ω , выходящую из точки γ_0 , вдоль которой квадратичная часть функционала E будет строго убывать, т. е. вектор скорости $\tilde{\phi}(u)|_{u=0}$ будет принадлежать подпространству, на котором гессиан d^2E отрицательно определен. Построение вариации $\tilde{\phi}(u)$ показано на рис. 104.

Так как в достаточно малом треугольнике x_0yz выполнено строгое неравенство: длина $(x_0, y) +$ длина $(x_0, z) >$ длина (z, y) , то и длина траектории $\tilde{\phi}(u)(t)\tilde{\phi}(u)(0) = (pz) + (zy) + (yq)$ строго меньше длины $\tilde{\alpha}(u)(t)$, т. е. длины γ_0 (от p до q). Здесь мы, конечно, использовали положительную определенность римановой метрики. Итак, каждое якобиево поле на отрезке px_0 , анули-

рующееся в точках p и q , дает единичный вклад в индекс гессиана d^2E в точке γ_0 .

Доказательство теоремы. Рассмотрим такое (достаточное мелкое) разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, чтобы каждый отрезок $[\gamma_0(t_{i-1}), \gamma_0(t_i)]$ геодезической γ_0 был минимальным геодезическим отрезком, соединяющим точки $\gamma_0(t_{i-1})$ и $\gamma_0(t_i)$ в достаточно малом шаре, содержащем эти точки.

Пусть $T_{\gamma_0}\{t_i\} = T_{\gamma_0}$ — векторное подпространство в T_{γ_0} , состоящее из всех векторных полей $v(t)$ вдоль $\gamma_0(t)$ со следующими свойствами: а) поле $v(t)$ якобиево вдоль γ_0 на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq k$; б) $v(0) = 0$, $v(1) = 0$ (см. рис. 105).

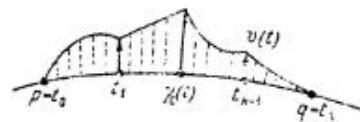


Рис. 105.

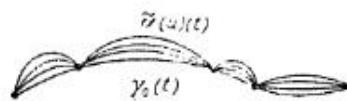


Рис. 106.

Иными словами, $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ — пространство всех ломанных якобиевых полей вдоль траектории $\gamma_0(t)$ (точки излома — $\{t_i\}$). Наряду с подпространством $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ мы рассмотрим в $T_{\gamma_0}\Omega$ еще одно подпространство, Q_{γ_0} , состоящее из всех полей $v(t)$, для которых $v(t_i) = 0$, $0 < i < k$.

Лемма. Касательное пространство $T_{\gamma_0}\Omega$ распадается в прямую сумму двух своих подпространств: $T_{\gamma_0}\Omega = T_{\gamma_0}\{t_i\} \oplus Q_{\gamma_0}$, причем подпространства $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ и Q_{γ_0} ортогональны относительно скалярного произведения, задаваемого в $T_{\gamma_0}\Omega$ гессианом d^2E (т. е. $d^2E(v_1, v_2) = 0$, если $v_1 \in T_{\gamma_0}\{t_i\}$, $v_2 \in Q_{\gamma_0}$). Далее, ограничение гессиана d^2E на подпространстве Q_{γ_0} положительно определено, т. е. индекс d^2E в $T_{\gamma_0}\Omega$ равен индексу d^2E в $T_{\gamma_0}\{t_i\}$. Так как $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ — конечномерное линейное пространство, то индекс гессиана d^2E всегда конечен.

Доказательство. Пусть $v \in T_{\gamma_0}$; рассмотрим векторы $v(t_i)$, $1 < i < k$; тогда существует и единственno такое ломаное якобиево поле v' , что $v(t_i) = v'(t_i)$, $1 < i < k$; следовательно, $(v - v')(t_i) = 0$, т. е. $v'' = v - v' \in Q_{\gamma_0}$. Итак, для любого $v \in T_{\gamma_0}$ существует и единственno разложение вида $v = v' + v''$, где $v' \in T_{\gamma_0}\{t_i\}$, а $v'' \in Q_{\gamma_0}$. Итак, T_{γ_0} разлагается в прямую сумму двух подпространств: $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ и Q_{γ_0} . Докажем их ортогональность. Из формулы второй вариации имеем:

$$\frac{1}{2} d^2E(v', v'') = - \sum_{(i)} \langle v'', \Delta(\nabla_{\gamma_0} v') \rangle - \int_0^1 \langle v'', 0 \rangle dt \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что ограничение d^2E на Q_{γ_0} — положительно определенная форма, т. е. $d^2E(v, v) \geq 0$, если $v \in Q_{\gamma_0}$, причем равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда $v = 0$. Рассмотрим вариацию $\tilde{a}(u)$ пути γ_0 , порождающую поле $v \in Q_{\gamma_0}$. Так как поле $v(t)$ аннулируется в точках t_i , $1 < i < k$, то очевидно, можно считать, что $\tilde{a}(u)(t_i) \equiv 0$ для любого u , $1 < i < k$ (см. рис. 106).

Так как каждый отрезок геодезической γ_0 от точки $\gamma_0(t_{i-1})$ до точки $\gamma_0(t_i)$ ($1 < i < k$) минимален, то для соответствующего отрезка пути $\tilde{a}(u)(t)$ от значения t_{i-1} до значения t_i выполнено неравенство: $E_{t_{i-1}}^{t_i}(\tilde{a}(u)(t)) \geq E_{t_{i-1}}^{t_i}(\gamma_0(t))$; следовательно: $E(\tilde{a}(u)(t)) \geq E(\gamma_0(t)) = E(\tilde{a}(0)(t))$. Так как значение $d^2E(v, v)$ можно понимать как вторую производную от $E(\tilde{a}(u)(t))$ в точке $u = 0$, то, тем самым, наличие локального минимума для $E(\tilde{a}(u)(t))$ означает, что $d^2E(v, v) \geq 0$.

Осталось доказать, что $d^2E(v, v) > 0$, если $v \neq 0$ и $v \in Q_{\gamma_0}$. Предположим, что $d^2E(v, v) = 0$. Докажем, что тогда $d^2E(\varphi, v) = 0$ при любом $\varphi \in T_{\gamma_0}$. Так как $\varphi = \varphi' + \varphi''$, где $\varphi' \in T_{\gamma_0}\{t_i\}$, а $\varphi'' \in Q_{\gamma_0}$, то

$$d^2E(\varphi' + \varphi'', v) = d^2E(\varphi', v) + d^2E(\varphi'', v) = d^2E(\varphi'', v),$$

так как $d^2E(\varphi', v) = 0$ (напомним, что подпространства $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ и Q_{γ_0} ортогональны относительно формы d^2E). Так как $(\alpha\varphi' + v) \in Q_{\gamma_0}$ для любого вещественного α , то имеем: $d^2E(\alpha\varphi' + v, v) \geq 0$, т. е. $\alpha^2 d^2E(\varphi', \varphi') + d^2E(v, v) + 2\alpha d^2E(\varphi', v) = \alpha^2 d^2E(\varphi', \varphi') + 2\alpha d^2E(\varphi', v) \geq 0$, т. е. в силу произвольности α получаем: $d^2E(\varphi', v) = 0$. Итак, $d^2E(\varphi, v) \equiv 0$ при любом $\varphi \in T_{\gamma_0}$, т. е. $v \in \text{Ker}(d^2E)$. В то же время $\text{Ker}(d^2E)$ состоит только из якобиевых полей, а так как подпространство Q_{γ_0} содержит только нулевое якобиево поле, то окончательно получаем, что $d^2E(v, v) > 0$ на Q_{γ_0} . Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет ограничиться при подсчете индекса d^2E вдоль γ_0 только ломанными якобиевыми полями, отвечающими достаточно мелкому разбиению $\{t_i\}$ отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим геодезическую $\gamma_0(t)$ на интервале от 0 до t_0 , где $0 < t_0 < 1$. Обозначим через $\lambda(t_0)$ индекс гессиана d^2E вдоль отрезка геодезической $[0, t_0]$. Ясно, что $\lambda(t_0)$ — монотонная функция, т. е. $\lambda(t_0) < \lambda(t'_0)$, если $t_0 < t'_0$. Это следует из того, что любое якобиево поле на $[0, t_0]$ аннулируется в точке $t = 0$ и в точке $t = \alpha$, где $\alpha < t_0$, а потому каждое такое поле продолжается до якобиева поля вдоль отрезка $[0, t'_0]$, если положить его равным нулю на отрезке $[\alpha, t'_0]$ (см. рис. 107). Далее, из локальной минимальности геодезической $\gamma_0(t)$ следует, что $\lambda(t_0) = 0$ при достаточно малых t_0 . Если t_0 — не сопряженная точка на $\gamma_0(t)$, то функция $\lambda(t)$ локально постоянна в достаточно малой окрест-

ности t_0 , так как множество не сопряженных точек вдоль $\gamma_0(t)$ — открытое множество. Таким образом, скачки функции $\lambda(t)$ могут происходить только в тех точках t_0 , которые сопряжены точке $\gamma_0(0) = p$. Характер этого скачка мы фактически уже изучили ранее. Этот скачок равен числу линейно независимых якобиевых полей, анулирующихся в точках $\gamma_0(0)$ и $\gamma_0(t_0)$ (т. е. индексу сопряженной точки $\gamma_0(t_0)$). В самом деле, каждое такое якобиево

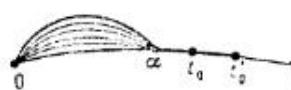


Рис. 107.

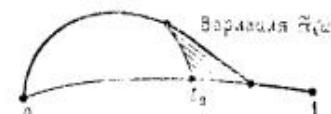


Рис. 108.

поле определяет вариацию $\bar{\lambda}(t)$ траектории $\gamma_0(t)$ в пространстве Ω , вдоль которой гессиан d^2E отрицательно определен. Этот эффект мы уже демонстрировали ранее; здесь мы только напомним его (см. рис. 108). Тем самым, проходя через каждую сопряженную точку t_0 , мы добавляем к функции $\lambda(t)$ индекс этой сопряженной точки, и, следовательно, дойдя до точки $q = \gamma_0(1)$ (которая предполагается не сопряженной с $p = \gamma_0(0)$), окончательно получаем, что значение $\lambda(1)$ как раз и равно сумме индексов (т. е. кратностей) всех точек, сопряженных с точкой $p = \gamma_0(0)$ вдоль геодезической $\gamma_0(t)$.

Теорема об индексе функционала E доказана.

§ 22. Применения теоремы об индексе

Используем теперь доказанную в § 21 теорему (об индексе) для изучения топологической структуры пространства петель $\Omega(M)$, где M^n — гладкое компактное многообразие. Мы будем поступать по аналогии с конечномерной теорией, которая позволяет по заданной функции Морса на конечномерном многообразии построить клеточное разбиение этого многообразия. Теперь вместо конечномерного многообразия мы возьмем «бесконечномерное многообразие» $\Omega(M) = \Omega(M, p, q)$ кусочно-гладких путей из точки p в точку q .

Рассмотрим функционал действия $E(\gamma)$, где $\gamma \in \Omega M$; этот функционал будет «функцией Морса», если все его критические точки (т. е. геодезические из точки p в точку q) будут невырождены. Как мы уже выясняли, это будет в том и только в том случае, когда точки p и q не сопряжены друг другу (вдоль любой геодезической, соединяющей p и q). Далее, в каждой критической точке $\gamma_0 \in \Omega M$ функционала E возникает целое число — индекс этой критической точки, т. е. индекс геодезической γ_0 (от точки p до точки q). Следовательно, по аналогии с конечномерным случаем,

можно ожидать, что на каждой критической точке (т. е. геодезической γ_0) «новиснет» одна клетка размерности, равной индексу этой критической точки (т. е. индексу геодезической γ_0). Тем самым возникает клеточное разбиение пространства ΩM на клетки, число и размерность которых определяется числом и индексами геодезических, соединяющих точки p и q (если p и q не сопряжены).

Так как мы рассматриваем римановы многообразия M^n , то между любыми двумя путями $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega M^n$ можно определить расстояние

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{0 < t \leq 1} \rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + \left(\int_0^1 \left(\frac{ds_1(t)}{dt} - \frac{ds_2(t)}{dt} \right)^2 dt \right)^{1/2},$$

где $s_1(t), s_2(t)$ — длины дуг вдоль $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$; $\rho(x, y)$ — расстояние на M^n между точками x и y (в заданной римановой метрике). Для каждого $a > 0$ рассмотрим область $\Omega^a \subset \Omega M$, т. е. множество всех точек $\gamma \in \Omega M$, для которых $E(\gamma) < a$. Оказывается, множество Ω^a можно (в некотором точном смысле) аппроксимировать гладким конечномерным многообразием.

Фиксируем некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ и обозначим через $\Omega(t_0, \dots, t_k)$ подпространство в ΩM , состоящее из всех кусочно-гладких геодезических, имеющих точки излома только при значениях параметра t , равных t_0, t_1, \dots, t_k . Через $\Omega^a(t_0, t_1, \dots, t_k)$ обозначим пересечение $\Omega^a \cap \Omega(t_0, \dots, t_k)$; т. е. точками $\Omega^a(t_0, \dots, t_k)$ являются все кусочно-геодезические линии, вдоль которых $E < a$.

Лемма 1. Пусть M^n — компактное многообразие и $\Omega^a \neq \emptyset$. Тогда для всех достаточно мелких разбиений (t_0, \dots, t_k) отрезка $[0, 1]$ множество $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E < a)$ можно снабдить структурой гладкого конечномерного многообразия.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — такое достаточно малое число, что для любой пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние, не превосходящее ε , существует единственная геодезическая, соединяющая их в шаре радиуса ε . Разбиение (t_0, \dots, t_k) выберем так, чтобы для всех i : $t_i - t_{i-1} < \varepsilon^2/a$. Тогда каждая геодезическая $\gamma \in \Omega^a(t_0, \dots, t_k)$ однозначно определяется набором из $k-1$ точек: $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{k-1})$. Отображение $\gamma \mapsto (\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{k-1}))$ устанавливает гомеоморфизм между $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E < a)$ и открытым подмножеством прямого произведения $M \times \dots \times M$ ($k-1$) раз. Лемма доказана.

Рассмотрим функцию E' — ограничение функционала E с пространства Ω^a на гладкое конечномерное многообразие $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E < a)$.

Лемма 2. Функция E' является гладкой функцией Морса на конечномерном многообразии $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E < a)$. Критическими точками этой функции являются в точности критические точки функционала E на $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E < a)$, т. е. геодези-

ческие (без изломов), идущие из p в q и имеющие длину, меньшую, чем \sqrt{a} . Индекс критической точки функции в точности равен индексу соответствующей геодезической. Для любого $b < a$ многообразие $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E \leq b)$ является деформационным ретрактом множества $\Omega^b = (E \leq b)$.

Доказательство. Предъявим деформацию $r: (E \leq b) \rightarrow \Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E \leq b)$. Пусть $\gamma \in (E \leq b)$ и (t_0, \dots, t_k) — фиксированное выше (достаточно мелкое) разбиение $[0, 1]$; рассмотрим точки $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_k)$, и пусть $r(\gamma)$ — единственная кусочно-гладкая геодезическая, принадлежащая $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E \leq b)$, определяемая точками $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_k)$. Построение искомой деформационной ретракции показано на рис. 109.

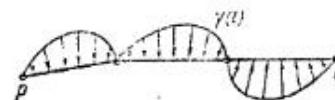


Рис. 109.

и E вытекает из локального характера определения якобиева поля вдоль геодезической: пространства якобиевых полей для функции E' и функционала E совпадают. Лемма доказана.

Тем самым мы получаем следующее утверждение.

Следствие. Пусть M^n — компактное многообразие (впрочем, вместо компактности можно было бы предположить только полноту многообразия M^n); $p, q \in M^n$ — пара точек, не сопряженных ни вдоль какой геодезической длины, не превосходящей \sqrt{a} . Тогда множество $\Omega^a = (E \leq a)$ гомотопически эквивалентно конечному клеточному комплексу, в котором каждая клетка размерности λ взаимно однозначно соответствует геодезической (длины, не превосходящей \sqrt{a}), индекса λ .

Устремляя $a \rightarrow \infty$ (к бесконечности), получаем, что все пространство Ω гомотопически эквивалентно клеточному комплексу, в котором каждая клетка взаимно однозначно соответствует геодезической из p в q , а размерность клетки равна индексу этой геодезической.

Замечание. Мы не будем здесь обсуждать более формально предельный переход $a \rightarrow \infty$, поскольку это обсуждение потребовало бы введения такого топологического понятия, как прямой предел расширяющихся пространств.

Теперь мы рассмотрим пространство Ω^* (M, p, q) всех непрерывных путей на многообразии M^n , идущих из точки p в точку q . Оказывается, что пространства $\Omega^* M$ и ΩM гомотопически эквивалентны, а потому клеточное разбиение ΩM порождает также и клеточное разбиение пространства $\Omega^* M$. Рассмотрим естественное вложение $i: \Omega \rightarrow \Omega^*$. Будем считать, что топология в простран-

стве Ω^* вводится с помощью метрики $\max_{0 \leq t \leq 1} \rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega^*$, а ρ — расстояние на римановом многообразии M^n . (Иногда эту топологию называют компактно-открытой топологией.) Из сравнения топологий на Ω и Ω^* (см. выше) легко следует, что отображение вложения i непрерывно.

Лемма 3. Пространства Ω и Ω^* гомотопически эквивалентны.

Доказательство. Построим непрерывную функцию g на Ω^* , $0 \leq g(\gamma) \leq 1$, такую, что из неравенства $|t - t'| \leq \epsilon < 2g(\gamma)$ следует: точки $\gamma(t)$ и $\gamma(t')$ соединены единственной минимальной геодезической. Пусть $f: M^n \rightarrow [0, 1]$ — произвольная непрерывная функция на компактном многообразии M^n , принимающая значения от 0 до 1. Через $e_1(r)$ (где $r \in [0, 1]$) обозначим наибольшее действительное число такое, что любая пара точек из $f^{-1}[0, r]$, расположенных друг от друга на расстоянии, не превосходящем $e_1(r)$, соединены единственной минимальной геодезической. Ясно, что с ростом r $e_1(r)$ — монотонная невозрастающая функция. Рассмотрим функцию $e_2(r)$ такую, что $0 < e_2(r) < e_1(r)$. Положим $\varepsilon(\gamma) = e_2(\max_t f\gamma(t))$; получаем непрерывное отображение $\varepsilon: \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$. По построению функции e_2 мы имеем, что любая пара точек на кривой $\gamma \subset M^n$, расстояние между которыми не превосходит $\varepsilon(\gamma)$, соединена единственной минимальной геодезической. Рассмотрим новую функцию:

$$\tau(\gamma, \alpha) = (\alpha - 1)\varepsilon(\gamma) + \max_{|t - t'| \leq \alpha} \rho(\gamma(t), \gamma(t'));$$

здесь $\tau: \Omega^* \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Функция τ строго монотонно возрастает при изменении аргумента α от 0 до 1 и $\tau(\gamma, 0) < 0 \leq \tau(\gamma, 1)$. Следовательно, для каждого $\gamma \in \Omega^*$ существует единственное $\alpha_0 \in (0, 1)$ такое, что $\tau(\gamma, \alpha_0) = 0$. Окончательно, положим $\alpha_0 = 2g(\gamma)$. Если $\alpha = |t - t'| \leq \alpha_0 = 2g(\gamma)$, то $\tau(\gamma, \alpha) \leq \tau(\gamma, \alpha_0) = 0$, т. е. $\tau(\gamma, \alpha) = (\alpha - 1)\varepsilon(\gamma) + \max_{|t - t'| \leq \alpha} \rho(\gamma(t), \gamma(t')) \leq 0$, т. е. $\rho(\gamma(t), \gamma(t')) \leq (1 - \alpha)\varepsilon(\gamma) \leq \varepsilon(\gamma)$, следовательно, $\gamma(t)$ и $\gamma(t')$ соединены единственной минимальной геодезической (см. выше определение $\varepsilon(\gamma)$). Построение функции $g(\gamma)$ закончено. Определим непрерывное отображение $r: \Omega^* \rightarrow \Omega$, положив: $r(\gamma)$ — однозначно определенный путь такой, что $r(\gamma)$ совпадает с γ при значениях параметра $t = 0, g(\gamma), 2g(\gamma), \dots, k \cdot g(\gamma)$ и при $t = 1$; здесь $k = \lfloor 1/g(\gamma) \rfloor$ (целая часть); траектория $r(\gamma)$ является геодезической на каждом интервале $[t \cdot g(\gamma), (t + 1) \cdot g(\gamma)]$, $0 \leq t \leq k - 1$. Как и выше, непосредственно проверяется, что отображения ir и ri гомотопны тождественным отображениям (см. рис. 110). Лемма доказана.

Итак, окончательно доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть M^n — компактное (или полное) риманово многообразие; p и q — пары точек на M^n , не сопряженные ни вдоль какой геодезической. Тогда пространство непрерывных путей $\Omega^*(M^n, p, q)$ (гомотопически эквивалентное пространству $\Omega(M^n, p, q)$) имеет гомотопический тип счетного клеточного комплекса, в котором каждой геодезической из точки p в точку q с индексом λ соответствует в точности одна клетка размерности λ .

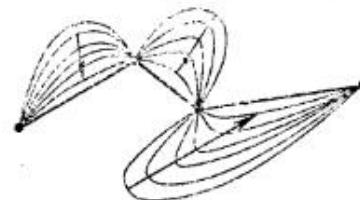


Рис. 110.

Замечание. Если фиксирована геодезическая γ_0 , то соответствующая клетка σ^{λ} (λ — индекс γ_0) возникает как множество траекторий, получающихся из γ_0 путем возмущения γ_0 в направлении всех якобиевых полей вдоль γ_0 (см. рис. 111).

Продемонстрируем некоторые приложения доказанной теоремы.

Применим эту теорему к задаче о вычислении групп целочисленных гомологий (и когомологий) пространства петель ΩS^n , где S^n — n -мерная сфера. Введем на сфере S^n стандартную риманову метрику, и пусть p и q — две достаточно близкие точки на сфере S . Тогда можно считать, что p и q не сопряжены ни вдоль какой геодезической на S^n (например, с точкой p сопряжена только одна точка на сфере — это диаметрально противоположная точка $-p$).

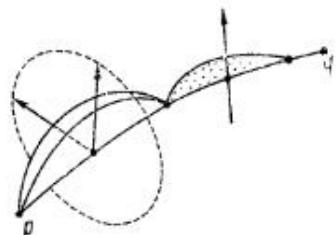
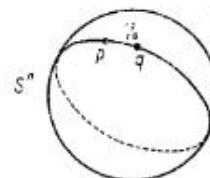
Рис. 111. Индекс $\lambda = 3$. Этой геодезической γ_0 соответствует трехмерная клетка σ^3 .

Рис. 112.

Тогда точки p и q соединены счетным числом геодезических $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$, где γ_0 — кратчайшая дуга большого круга, на котором лежат точки p и q (см. рис. 112). Обозначим окружность большого круга через d ; тогда $\gamma_1 = d + \gamma_0$; $\gamma_2 = d + d + \gamma_0$; $\gamma_3 = d + d + d + \gamma_0$ и т. д. Ясно, что индекс $\lambda(\gamma_k)$ геодезической γ_k равен $k(n-1)$. Здесь мы использовали тот факт, что точки p и $-p$ сопряжены с кратностью $n-1$: существует $n-1$ геодезических вариаций (поворотов) дуги большого круга, соединяющей точки p и $-p$. Из доказанной ранее теоремы вытекает, что пространство петель ΩS^n имеет гомотопический тип кле-

точного комплекса, у которого в каждой из размерностей $0, n-1, 2(n-1), 3(n-1), \dots$ имеется ровно по одной клетке (в других размерностях клеток нет). Отсюда мы можем получить информацию о гомологиях $H_*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$. Предположим сначала, что $n > 2$; тогда каждая из указанных выше клеток $\{\sigma^{k(n-1)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, является (ко)циклом (поскольку две соседние размерности вообще не содержат клеток), т. е.

$$H_p(\Omega S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } p = k(n-1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ 0, & \text{при всех других значениях } p. \end{cases}$$

В частности, $H_p(\Omega S^n; \mathbb{Z}) \cong H^p(\Omega S^n; \mathbb{Z})$. При $n = 2$ рассуждения несколько усложняются. В этом случае в каждой размерности: $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ имеется ровно по одной клетке, поэтому тривиальность граничного оператора $\partial: C_p \rightarrow C_{p-1}$ уже не вытекает из приведенных ранее соображений. Изучим более подробно структуру трехмерного остава $(\Omega)^{(3)}$ пространства петель $\Omega(S^2)$. Из доказанного выше получаем: $(\Omega S^2)^{(3)} = \sigma^3 \cup \sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \sigma^0$. Напомним, что из стандартного расслоения $E \xrightarrow{\pi} S^2$ (где E — пространство путей на S^2 , выходящих из фиксированной точки на S^2) вытекает соотношение: $\pi_1(S^2) = \pi_{i-1}(\Omega)$, $i \geq 1$. Как показано в § 21 ч. II книги [1], $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$, т. е. $\pi_1(\Omega) = \mathbb{Z}$. Далее (см. [1] ч. II, § 22), $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (т. е. $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$). Так как $H_1(\Omega; \mathbb{Z}) = \{\text{прокоммутированная группа } \pi_1(\Omega)\}$, то $H_1(\Omega; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Следовательно, граница клетки σ^2 стягивается по $S^1 = \sigma^0 \cup \sigma^1$ в точку, т. е. двумерный остав $(\Omega)^{(2)}$ гомотопически эквивалентен букету $S^1 \vee S^2$ (см. § 4). Так как $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$, то трехмерная клетка σ^3 при приклейке к $S^1 \vee S^2$ должна уничтожить действие фундаментальной группы $\pi_1(S^1)$ на $\pi_2(S^2 \vee S^1) = \mathbb{Z}$, следовательно, $(\Omega)^{(3)}$ гомотопически эквивалентен произведению $S^1 \times S^2$. Так как двумерные (ко)гомологии ΩS^2 полностью определяются трехмерным оставом $(\Omega S^2)^{(3)}$, то получаем, что $H_2(\Omega S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и $H^2(\Omega; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Обозначим образующие группы когомологий $H^1(\Omega; \mathbb{Z})$ и $H^2(\Omega; \mathbb{Z})$ через a и b соответственно ($\deg(a) = 1$; $\deg(b) = 2$). Ясно, что $a^2 = 0$ в кольце $H^*(\Omega; \mathbb{Z})$.

Напомним определение H -пространства. Топологическое пространство Y называется H -пространством, если определена операция умножения $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$, обладающая «гомотопической единицей» (см. § 7). Рассмотрим отображения

$$Y \xrightarrow{j_1} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y,$$

$$Y \xrightarrow{j_2} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y.$$

Здесь $j_1(y) = (y, y_0)$, $j_2(y) = (y_0, y)$, $y_0 \in Y$ — «гомотопическая единица». Отображения μ_{j_α} гомотопны тождественному отображению $Y \rightarrow Y$.

Напомним также, что пространство петель ΩM является H -пространством. Отображение $\mu: \Omega M \times \Omega M \rightarrow \Omega M$ задается произведением путей (см. § 7)

$$f \circ g = \mu(f, g),$$

т. е. двум петлям ставится в соответствие петля, получаемая последовательным прохождением обеих петель.

Согласно теореме Хопфа (см. § 7) алгебра когомологий любого H -пространства над полем рациональных чисел изоморфна тензорному произведению $\Lambda(x_1, \dots, x_i) \otimes \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_s]$, где $\Lambda(x_1, \dots, x_i)$ — внешняя алгебра от нечетномерных образующих x_1, \dots, x_i ; $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_s]$ — алгебра полиномов от четномерных образующих y_1, \dots, y_s . В частности, если H -пространство конечномерно, то его алгебра когомологий изоморфна внешней алгебре $\Lambda(x_1, \dots, x_i)$.

Так как пространство $\Omega(S^2)$ является H -пространством, то $H^*(\Omega(S^2)) \cong \Lambda(x_1, \dots, x_i) \otimes \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_s]$. Мы уже предъявили две образующие: $x_1 = a$ ($\deg(a) = 1$), $y_1 = b$ ($\deg(b) = 2$); следовательно, все степени b^k , $k = 1, 2, 3, \dots$, отличны от нуля в алгебре $H^*(\Omega(S^2))$, и, следовательно, $H^*(\Omega(S^2))$ содержит следующую подалгебру: $\Lambda(a) \otimes \mathbb{Q}[b]$. Мы утверждаем, что эта подалгебра полностью исчерпывает всю алгебру $H^*(\Omega(S^2))$. В самом деле, подалгебра $\Lambda(a) \otimes \mathbb{Q}[b]$ содержит в каждой размерности по одной аддитивной образующей: b^q (в размерностях вида $2q$, $q = 1, 2, 3, \dots$) или $a \cdot b^q$ (в размерностях вида $2q + 1$, $q = 0, 1, 2, 3, \dots$). С другой стороны, ранее было показано, что клеточное разбиение пространства $\Omega(S^2)$ содержит ровно по одной клетке в каждой размерности; следовательно, предъявленные выше коциклы полностью исчерпывают всю алгебру $H^*(\Omega(S^2))$. Отсюда следует, в частности, для целочисленных гомологий: $H_p(\Omega(S^2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ при любом $p = 0, 1, 2, 3, \dots$, поскольку все клетки c^i — циклы.

Окончательный ответ:

- 1) $H^p(\Omega(S^n); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } p = k(n-1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{при всех других } p; \end{cases}$
- 2) $H^*(\Omega(S^{2n+1}); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[b_{2n}]$;
- $H^*(\Omega(S^{2n}); \mathbb{Q}) = \Lambda(a_{2n-1}) \otimes \mathbb{Q}[b_{2n-2}]$.

Продемонстрируем также, как информация о гомотопиях и гомологиях многообразия M позволяет делать вполне определенные высказывания о поведении (и существовании) геодезических на римановом многообразии M^n . Используем, например, полученную выше информацию о гомологиях пространства петель $\Omega(S^n)$; $n \geq 2$.

Предложение 1. Пусть M^n — риманово многообразие, гомотопически эквивалентное сфере S^n , $n \geq 2$. Тогда любые две несопряженные точки $p, q \in M^n$ соединены бесконечным числом геодезических.

Это предложение немедленно следует из доказанной выше основной теоремы о структуре пространства петель ΩM^n и из информации о гомологиях этого пространства.

З а м е ч а н и е. Геодезические, существование которых установлено в настоящей теореме, являются различными точками функционального пространства ΩM^n , однако геометрически (после их реализации в виде гладких кривых на M^n) некоторые из них могут совпадать (см., например, геодезические на сфере S^n). Вопрос о выяснении числа геометрических различных геодезических требует, вообще говоря, дополнительного исследования.

Пусть M^n — компактное гладкое многообразие и пусть $i > 0$ — первый номер группы $\pi_i(M^n)$ такой, что $\pi_i(M^n) \neq 0$. Тогда для любых двух несопряженных точек $p, q \in M^n$ существует соединяющая их геодезическая индекса i . В самом деле: так как $\pi_i(M^n) = \pi_{i-1}(\Omega M^n)$, то и группа $H_{i-1}(\Omega(M^n))$ отлична от нуля; следовательно, по теореме о клеточном разложении пространства петель получаем, что функционал E на ΩM^n должен иметь по крайней мере одну критическую точку (т. е. геодезическую) индекса i . Утверждение доказано.

Если многообразие имеет отрицательную (неположительную) кривизну по всем двумерным направлениям, то (как будет показано в § 23) все критические точки функционала E на $\Omega(M^n)$, p, q имеют индекс 0 (локальные минимумы).

Задача 1. Выведите отсюда, что геодезические, соединяющие точки p и q , находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\pi_1(M^n)$.

§ 23. Периодическая задача вариационного исчисления

Ранее мы подробно рассмотрели одномерную вариационную задачу на римановом многообразии M^n , связанную с функционалами длины $L(\gamma)$ и действия $E(\gamma)$, где $\gamma \in \Omega(M^n, p, q)$, p, q — фиксированные точки на M^n . Эта вариационная задача называется «задачей с закрепленными концами», так как $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $\gamma \in \Omega(M^n; p, q)$. Важное значение имеют так называемые «замкнутые экстремумы», к изучению которых мы сейчас и переходим. Изучение этой задачи несколько отличается от «задачи с фиксированными концами».

Периодическая задача ставится следующим образом. Рассмотрим компактное гладкое риманово многообразие M^n ; через $\Pi(M^n)$ мы обозначим пространство всех замкнутых гладких кривых на M^n , т. е. точка пространства $\Pi(M^n)$ есть гладкое отображение $\gamma: S^1 \rightarrow M^n$, где $S^1 = S^1(t)$, $0 < t < 2\pi$, — окруж-

ность, отнесенная к стандартной угловой координате t , при этом начальная точка не фиксируется.

З а м е ч а н и е. Пространство $\Pi(M^n)$ (топология в нем зводится точно так же, как и в пространстве $\Omega(M^n, p, q)$, см. выше), отличается от пространства $\cup \Omega(M^n; p, p) = \tilde{\Pi}(M)$, т. е. $p = q$;

имеется отображение (не расслоение!) $\Pi(M^n, p, p) \rightarrow \Pi(M^n)$, где прообразом точки является окружность. Множество линейно связных компонент пространства $\Pi(M^n)$ — это, по определению, множество «свободных» гомотопических классов отображений $S^1 \rightarrow M^n$. Согласно § 17 ч. II книги [1], гомотопические классы определяются классами сопряженных элементов в группе $\pi_1(M^n)$.

Вывод. Допустимые функционалы на путях многообразия M^n имеют обязательно минимумы в каждой линейно связной компоненте пространства $\Pi(M^n)$. Следовательно, число минимумов не менее числа классов сопряженности в группе $\pi_1(M^n)$.

В настоящем параграфе мы будем широко использовать разработанный выше аппарат изучения экстремалей на пространстве $\Omega(M^n, p, q)$, а потому не будем повторять построение аналогичных конструкций.

Пространство $\Pi(M^n)$, как и пространство $\Omega(M^n, p, q)$, может быть естественным путем превращено в «бесконечномерное»; если $\gamma \in \Pi(M^n)$ — замкнутая траектория (напомним, что под термином «траектория» мы понимаем траекторию с параметризацией; т. е. траектории с разными параметризациями являются разными точками пространства $\Pi(M)$), то «касательное пространство» $T_\gamma \Pi(M)$ к «многообразию» $\Pi(M)$ в точке $\gamma \in \Pi(M)$ состоит из всех гладких векторных полей вдоль γ (т. е. периодических векторных полей). На пространстве $\Pi(M)$ оба функционала: $L(\gamma)$ и $E(\gamma)$ (длина пути и действие пути) определены точно так же, как и в случае пространства $\Omega(M, p, q)$. Изучим экстремали функционалов E и L .

Л е м м а 1. Если $\gamma_0 \in \Pi(M)$ — замкнутая экстремаль функционала E , то γ_0 — замкнутая геодезическая, отнесенная к параметру, пропорциональному натуральному.

Доказательство немедленно вытекает из соответствующих теорем для экстремалей из пространства $\Omega(M, p, q)$. Если $\gamma(t)$ — периодическая экстремаль для функционала длины L , то все траектории $\gamma(t')$, получаемые из $\gamma(t)$ с помощью гладких замен параметра $t \rightarrow t'$, также являются экстремалами функционала L . Следовательно, «критические точки» функционала L не являются изолированными в пространстве $\Pi(M)$; в частности, они ни в каком смысле не могут быть «изолированными и невырожденными» критическими точками для функционала E .

Поэтому (как и в случае пространства $\Omega(M, p, q)$) основное внимание мы сосредоточим на изучении экстремалей функцио-

нала E . Отметим, что замкнутая геодезическая $\gamma_0(t) \in \Pi(M)$ может быть кратной, в том смысле, что с изменением t от 0 до 1 множество $\{\gamma(t)\} \subset M^n$, являющееся гладкой кривой, пробегается несколько раз; см. рис. 113. Геодезические $\gamma(t)$, изображаемые в M^n гладкой кривой, пробегаемой один раз, называются простыми (однократными) геодезическими.

Обратно, если задана некоторая простая замкнутая геодезическая, то она определяет бесконечную дискретную последовательность замкнутых геодезических, получающихся из исходной многократным пробеганием (с большими скоростями, чем скорость пробегания исходной геодезической). Все эти траектории являются различными точками пространства $\Pi(M)$. Если, например, исходная траектория $\gamma_0(t)$ определяла ненулевой элемент фундаментальной группы $\pi_1(M)$ (более точно: ее класс сопряженности отличен от единичного элемента), то описанные выше кратные ей траектории принадлежат уже другим классам сопряженности группы $\pi_1(M)$.

Как и в случае геодезических с фиксированными концами, с каждой замкнутой геодезической можно естественно связать некоторое целое число, которое по аналогии с предыдущим случаем мы также назовем степенью вырождения геодезической. Определение будет сейчас дано; если же степень вырождения будет равна нулю, то тогда геодезическая будет называться невырожденной.

Для того чтобы корректно определить степень вырождения замкнутой геодезической, рассмотрим гессиан d^2E (см. его определение и свойства выше — в параграфе, посвященном изучению геодезических с фиксированными концами). Нами была доказана ранее так называемая «формула второй вариации», имеющая следующий вид:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(\hat{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = - \int_0^1 \langle v_2, \nabla_{\dot{\gamma}_0} \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1 + R(\dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_1) \dot{\gamma}_0 \rangle dt,$$

где R — тензор кривизны Римана, $\dot{\gamma}_0$ — вектор скорости геодезической γ_0 , а векторные поля v_1 и v_2 описывают двупараметрическую вариацию, т. е. пару «касательных векторов» к бесконечномерному многообразию ΠM в точке γ_0 . Как было отмечено выше, векторные поля v_1 и v_2 определены вдоль всей траектории γ_0 , являются гладкими и периодическими. Поскольку гессиан d^2E определяет билинейную симметричную форму на касательном пространстве $T_{\gamma_0}(\Pi M)$, то, следовательно, эту форму можно однозначно задавать соответствующим ей линейным дифференциальным оператором, который, очевидно, имеет следующий вид: $D = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 - R(\dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_1) \dot{\gamma}_0$. Здесь мы поступаем по анало-



Рис. 113. Двукратная геодезическая.

гии с конечномерным случаем, когда задать билinearную форму означает задать линейный оператор D , с помощью которого искомая форма B определяется формулой $B(x, y) = \langle x, Dy \rangle$.

В нашем случае действие оператора D на «касательные векторы» $v \in T_{\gamma_0}(\text{ПМ})$ (т. е. на гладкие периодические векторные поля, определенные вдоль замкнутой геодезической γ_0) осуществляется по следующей формуле:

$$D(v) = -(\nabla_{\gamma_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v) \dot{\gamma}_0 = -[(\nabla_{\gamma_0})^2 + R(\dot{\gamma}_0, \cdot) \dot{\gamma}_0](v).$$

Напомним, что «касательный вектор» v (т. е. периодическое векторное поле) называется якобиевым, если это поле анулируется оператором D , т. е. является решением следующего дифференциального уравнения: $D(v) = -(\nabla_{\gamma_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v) \dot{\gamma}_0 = 0$. Ясно, что это определение полностью копирует ситуацию геодезических с фиксированными концами. Таким образом, якобиевые поля (якобиевы «касательные векторы») являются элементами ядра линейного оператора D , действующего на касательном пространстве $T_{\gamma_0}(\text{ПМ})$.

Определение 1. Степенью вырождения замкнутой геодезической γ_0 назовем размерность ядра оператора D .

Точно так же, как в случае геодезических с закрепленными концами, доказывается, что это число конечно (см. выше).

Определение 2. Замкнутую геодезическую будем называть невырожденной, если ее степень вырождения равна нулю.

Для простоты ограничимся в дальнейшем рассмотрением, в основном, замкнутых невырожденных геодезических. Оказывается, с каждой такой геодезической естественно связано целое число, называемое «индексом геодезической». Для его определения снова обратимся к оператору D . Индекс может быть определен несколько иным образом. В самом деле, поскольку индекс был равен числу отрицательных квадратов после приведения гессиана d^2E к каноническому виду на касательной плоскости $T_{\gamma_0}(\text{ПМ})$, то, следовательно, вдоль каждого «касательного вектора» $v \in T_{\gamma_0}(\text{ПМ})$, отвечающего одному из отрицательных квадратов формы d^2E , эта форма отрицательно определена, следовательно, этот «касательный вектор» является собственным значением оператора D с собственным числом $\lambda < 0$. Таким образом, индекс гессиана d^2E можно было бы определить просто как число линейно независимых решений следующего дифференциального уравнения: $D(v) = \lambda v, \lambda < 0$ (это система дифференциальных уравнений с параметром λ , который является собственным числом). Таким образом, решениями уравнения $D(v) = \lambda v, \lambda < 0$, являются гладкие периодические векторные поля вдоль геодезической γ_0 (если, конечно, эти решения вообще существуют). Ситуация здесь отлична от случая якобиевых «касательных векторов» — там всегда существует хотя бы нулевое решение однородной системы; в случае же $\lambda < 0$ решение может не существовать: в этом

случае мы будем говорить, что индекс замкнутой геодезической равен нулю.

Определение 3. Индексом невырожденной замкнутой геодезической называется число линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений

$$D(v) = -(\nabla_{\gamma_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v) \dot{\gamma}_0 = 0.$$

В случае геодезических с закрепленными концами это определение также применимо.

Важное замечание. Конечно, определенный нами выше индекс замкнутой геодезической также связан с распределением вдоль этой геодезической точек, сопряженных к выбранной начальной точке на геодезической, однако эта взаимосвязь носит более сложный характер, чем в случае геодезических с закрепленными концами, а потому мы не будем здесь вдаваться в эти детали.

Задача 1. Докажите, что индекс не меньше числа сопряженных точек (но может быть не равен).

В некотором смысле изучение «периодической задачи вариационного исчисления» более сложно, чем изучение геодезических с закрепленными концами. Характер возникающих трудностей в достаточной степени иллюстрируется наличием кратных геодезических; например, задача о нахождении количества простых (т. е. некратных) замкнутых геодезических далеко не тривиальна.

Для того чтобы упростить задачу изучения замкнутых геодезических, мы разберем здесь только один пример: случай римановых многообразий отрицательной кривизны, т. е. таких многообразий, на которых все кривизны по всем двумерным направлениям отрицательны. Примеры таких многообразий нам известны, такими многообразиями являются: плоскость Лобачевского, снабженная стандартной метрикой постоянной отрицательной кривизны; двумерные гладкие замкнутые многообразия, получающиеся путем факторизации плоскости Лобачевского по действию дискретных групп, действующих изометриями на плоскости Лобачевского и изоморфных фундаментальным группам поверхностей (см. [1], ч. II, § 20 о кристаллографических группах на плоскости Лобачевского). Для простоты мы будем предполагать иногда компактность изучаемого многообразия.

Теорема 1. Пусть M — компактное риманово гладкое многообразие отрицательной кривизны. Тогда в каждом свободном гомотопическом одномерном классе существует единственная замкнутая геодезическая.

Доказательство. Рассмотрим какой-либо фиксированный класс свободных замкнутых петель, гомотопных друг другу. Будем считать, что мы рассматриваем только гладкие замкнутые траектории; сопоставим каждой траектории значение функционала на этой траектории; рассмотрим число c , равное

нижней грани всех этих значений; тогда существует, вообще говоря, бесконечная последовательность замкнутых петель, длины которых сходятся к числу c . В силу компактности многообразия из этой последовательности можно выбрать последовательность кривых, которые поточечно сходятся к некоторой гладкой кривой γ_0 , которая, как легко проверить, будет замкнутой геодезической, и значение функционала E на этой геодезической будет равно числу c . Осталось доказать единственность этой геодезической. Для этого нам потребуется важная лемма, значение которой не исчерпывается только доказательством нашей теоремы.

Лемма 2. Пусть γ_0 — замкнутая геодезическая на многообразии M отрицательной кривизны (здесь многообразие M можно не предполагать компактным). Тогда эта геодезическая невырождена и ее индекс равен нулю, т. е. иными словами, дифференциальные уравнения $D(v) = \lambda v$, $\lambda < 0$, не имеют ни одного решения, а уравнение $D(v) = 0$ имеет только нулевое решение.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай уравнения $D(v) = 0$. Надо доказать, что оно не имеет ненулевых решений. Пусть v — ненулевое решение. Тогда имеем: $(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = 0$, отсюда: $\langle (\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v \rangle = -\langle R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0, v \rangle > 0$, так как величина $\langle R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0, v \rangle$ как раз и является кривизной по двумерному направлению, задаваемому в каждой точке траектории γ_0 двумя векторами: $\dot{\gamma}_0$ и v . Отсюда:

$$\frac{d}{dt} \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle = \nabla_{\dot{\gamma}_0} \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle = \\ = \langle (\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v \rangle + \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, \nabla_{\dot{\gamma}_0} v \rangle = \langle (\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v \rangle + |\nabla_{\dot{\gamma}_0} v|^2 > 0,$$

т. е. функция $\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle$ строго монотонно возрастает с ростом t вдоль $\gamma_0(t)$.

Рассмотрим на траектории $\gamma_0(t)$ произвольную фиксированную точку, например, точку $\gamma_0(0)$. Решение $v(t)$ является функцией параметра t ; изучим поведение этого решения с изменением t . Первый случай: в точке $\gamma_0(0)$ выполнено неравенство $\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle|_{t=0} \geq 0$. Тогда имеем: $\frac{d}{dt} \langle v, v \rangle|_{t=0} = \nabla_{\dot{\gamma}_0} \langle v, v \rangle|_{t=0} = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle|_{t=0} > 0$ при всех $t > 0$, так как $\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle$ — строго монотонно возрастающая функция. Второй случай: в точке $\gamma_0(0)$ выполнено неравенство $\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle|_{t=0} < 0$. Тогда рассмотрим вместо траектории $\gamma_0(t)$ траекторию $\gamma_0(-t)$, заменив параметр t ; при этом в каждой точке вектор скорости $\dot{\gamma}_0$ заменится на противоположный, $-\dot{\gamma}_0$; следовательно:

$$\frac{d}{dt} \langle v, v \rangle|_{t \rightarrow -t} = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0(-t)} v, v \rangle|_{t \rightarrow -t} = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle|_{t=0} > 0$$

при всех $t > 0$. Таким образом, можно считать, что либо вдоль траектории $\gamma_0(t)$ (т. е. с положительным направлением параметра), либо вдоль траектории $\gamma_0(-t)$ (т. е. с отрицательным на-

правлением параметра) модуль вектора v строго монотонно возрастает; но так как траектория замкнута, то через некоторое время мы снова вернемся в исходную точку, но с возросшим модулем вектора v ; поскольку функция v предполагалась гладкой вдоль γ_0 , то получили противоречие. Лемма доказана для уравнения $D(v) = 0$. Теперь рассмотрим уравнение: $D(v) = \lambda v$, $\lambda < 0$. Так как $D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = \lambda v$, то

$$(\nabla_{\dot{\gamma}})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = -\lambda v; \\ \langle (\nabla_{\dot{\gamma}})^2 v, v \rangle = -\langle R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0, v \rangle - \lambda \langle v, v \rangle > 0,$$

так как $\lambda < 0$. Именно здесь мы использовали то обстоятельство, что $\lambda < 0$. Дальнейшие рассуждения в точности повторяют предыдущие; отсюда следует, что уравнение $Dv = \lambda v$ не имеет решений. Лемма полностью доказана.

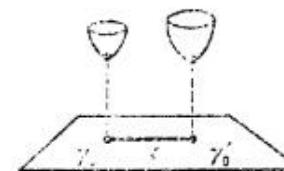


Рис. 114.

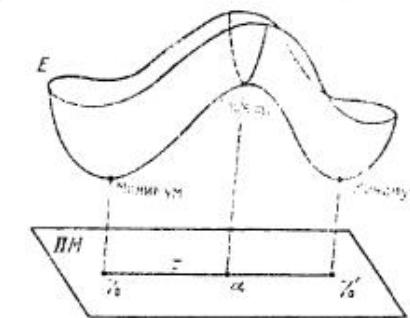


Рис. 115.

Вернемся к доказательству теоремы. Рассмотрим замкнутую геодезическую γ_0 в данном свободном гомотопическом классе (см. доказательство выше). Из доказанной леммы следует, что эта геодезическая невырождена; в частности, она изолирована. Так как, в силу леммы, индекс ее равен нулю, то, следовательно, функционал E , рассматриваемый как функция на пространстве замкнутых кривых, имеет в точке γ_0 локальный минимум. Допустим, что в данном гомотопическом классе есть несколько таких локальных минимумов (т. е. несколько замкнутых геодезических). Выберем любые две замкнутые геодезические: γ_0 и γ'_0 . Поскольку обе они невырождены, то они изолированы, и функционал E имеет в них строгий локальный минимум (см. рис. 114). Поскольку γ_0 и γ'_0 принадлежат одному свободному гомотопическому классу, то существует траектория τ , соединяющая эти две точки в пространстве PM , т. е. существует гомотопия, переводящая γ_0 в γ'_0 . Рассмотрим поведение функционала E , ограниченного на траектории τ . Поступая по аналогии с конечномерным случаем, получаем, что существует такая траектория τ , вдоль которой функционал E имеет между точками γ_0 и γ'_0 еще одну критическую седловую точку — α ; см. рис. 115. Однако эта точка уже не может

быть точкой локального минимума, что противоречит доказанной выше лемме. Следовательно, точки γ_0 и γ_0' совпадают. Тем самым в свободном гомотопическом классе имеется только один локальный минимум; он же — и абсолютный минимум, причем других геодезических (кроме кратных) нет. Теорема доказана. Из доказанной выше леммы вытекают полезные следствия и для некомпактных многообразий отрицательной кривизны.

Теорема 2. Пусть M — гладкое многообразие, имеющее отрицательную кривизну по всем двумерным направлениям. Тогда никакие две точки многообразия M не сопряжены на вдоль какой геодезической.

Доказательство. Следует доказать, что уравнение $D(v) = 0$ не имеет никаких решений, кроме нулевого. Это мгновенно вытекает из леммы, что и завершает доказательство.

Теорема 3. Предположим, что M — односвязное гладкое многообразие отрицательной кривизны (по всем двумерным направлениям), любые две точки которого могут быть соединены геодезической. Тогда любая пара точек многообразия M соединена единственной геодезической. Многообразие M диффеоморфно евклидову пространству.

Доказательство. Поскольку M односвязно, то пространство $\Omega(M; p, q)$ связно. Ввиду отсутствия сопряженных точек (см. выше), каждая геодезическая имеет индекс, равный нулю. Из теоремы Морса следует, что пространство $\Omega(M; p, q)$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса, размерность которого равна нулю, и каждой геодезической отвечает одна нульмерная клетка (точка). В силу связности $\Omega(M; p, q)$ имеется только одна вершина, а потому точки p и q соединены единственной геодезической. Следовательно, экспоненциальное отображение касательного пространства на многообразие — взаимнооднозначно, что и доказывает теорему.

Оказывается, тот факт, что некоторая группа является фундаментальной группой многообразия отрицательной кривизны, накладывает довольно сильные ограничения на эту группу (напомним, что любая конечно порожденная группа может быть реализована как фундаментальная группа компактного четырехмерного многообразия; в то же время, далеко не каждая группа может быть фундаментальной группой трехмерного компактного многообразия, например, группа $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть M — многообразие отрицательной кривизны. Если два элемента фундаментальной группы $\pi_1(M)$ коммутируют между собой, то оба они принадлежат к одной циклической подгруппе в группе $\pi_1(M)$.

Доказательство. Пусть a и b — два коммутирующих элемента. Если они принадлежат к одной циклической подгруппе, то утверждение доказано. Пусть они не принадлежат к одной цик-

лической подгруппе. Тогда можно построить гладкое отображение в многообразие M двумерного тора T^2 , реализующего условие коммутирования указанных двух элементов a и b . Действительно, условие коммутативности, записанное в виде $aba^{-1}b^{-1} = 1$, и определяет отображение тора T^2 в M (см. рис. 116). При этом коммутирующие элементы a и b оказываются меридианом и параллелью этого тора (стандартно вложенными в этот тор). Оказывается, что условие отрицательности кривизны позволяет осуществить гладкую деформацию этого тора в такой тор, который будет вложен в M как вполне геодезическое подмногообразие. Для этого следует рассмотреть такое положение тора в M , при котором он имеет минимальную площадь. Эту теорему существования минимального тора мы принимаем без доказательства, но-



Рис. 116.

скольку факт существования минимального решения достаточно нетривиален и составляет содержание известной задачи Платона. Указанное выше минимальное положение будет задавать тор как двумерное минимальное подмногообразие в M ; поскольку тор — двумерен, то на нем можно выбрать конформные координаты, относительно которых отображение вложения тора в M станет гармоническим отображением (это — специфика двумерных многообразий, для которых имеет место теорема униформизации). Отсюда уже довольно легко усмотреть, что тор будет вложен в M как вполне геодезическое подмногообразие, т. е. как такое подмногообразие, каждая геодезическая на котором (в индуцированной римановой метрике) является, в то же время, геодезической и в объемлющем римановом многообразии. Поскольку объемлющее многообразие имело отрицательную кривизну, и так как тор — вполне геодезичен, то, следовательно, мы получили на двумерном торе индуцированную риманову метрику отрицательной гауссовой кривизны (напомним, что гауссова кривизна двумерной поверхности является внутренним инвариантом и совпадает с ее скалярной кривизной, т. е. в данном случае — с кривизной по двумерному направлению, совпадающему с касательным направлением к этому тору). Но на двумерном торе нельзя ввести такой метрики, поскольку тогда интеграл гауссовой кривизны по тору был бы отличен от нуля, что противоречит формуле Гаусса—Бонне, согласно которой этот интеграл совпадает с эйлеровой характеристикой тора (после деления интеграла на 2π), равной нулю. Полученное противоречие и доказывает теорему.

§ 24. ФУНКЦИИ МОРСА НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ДИАГРАММЫ ХЕГОРА

Рассмотрим трехмерное гладкое компактное связное замкнутое многообразие M^3 (для простоты предположим ориентируемость многообразия M^3); пусть $f(x)$ — гладкая функция Морса на этом многообразии, имеющая ровно один минимум (он же — абсолютный), один максимум (он же — абсолютный) и некоторое количество точек индексов 1 и 2. Как было доказано выше, среди всех таких функций Морса можно выбрать такую, что ее критические точки будут упорядочены в том смысле, что значения функции f на M пробегают отрезок $[0, 1]$; $f(p) = 0$, $f(p') = 1$, где p и p' — точки минимума и максимума соответственно; затем, все критические точки индекса 1 расположены на поверхности уровня $f = 1/3$; все критические точки индекса 2 расположены на поверхности уровня $f = 2/3$. Обозначим критические точки индекса 1 через x_1, \dots, x_{q_1} , а точки индекса 2 — через y_1, \dots, y_{q_2} . Из двойственности Пуанкаре (для целых коэффициентов в случае ориентируемого многообразия) сразу следует, что $q_1 = q_2$, т. е. число критических точек индекса 1 равно числу точек индекса 2.

Рассмотрим поверхность уровня $M^2 = \{f = \frac{1}{2}\}$; так как на ней нет критических точек и так как размерность ее равна 2, то M^2 диффеоморфно двумерному гладкому компактному связному замкнутому многообразию. Так как M^2 является поверхностью уровня и краем трехмерного многообразия, задаваемого неравенством $\frac{1}{2} < f < 1$, то M^2 — ориентируемая поверхность, т. е. гомеоморфна сфере с некоторым количеством ручек. Пусть r — род (т. е. число ручек) поверхности M^2 . По построению, M^2 — это многообразие, являющееся одновременно краем двух трехмерных многообразий: $\{1/2 < f < 1\}$ и $\{0 < f < 1/2\}$, которые обозначим, соответственно через Π_1 и Π_2 . Для наглядности можно рассматривать каждое из Π_i (кстати, они гомеоморфны) как трехмерное заполнение двумерной поверхности M^2 (рода r), стандартно вложенной в трехмерное евклидово пространство. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. Любое трехмерное гладкое компактное связное замкнутое многообразие может быть (неоднозначно) представлено в виде «склейки» двух трехмерных многообразий Π_i , $i = 1, 2$, с краем, каждое из которых гомеоморфно стандартному трехмерному многообразию Π — области, ограниченной в трехмерном евклидовом пространстве стандартно вложенной в него поверхностью рода r (для некоторого r). При этом склейка многообразий Π_1 и Π_2 производится по некоторому диффеоморфизму α границы (границей является поверхность рода r).

Это представление многообразия M^3 в виде склейки Π_1 и Π_2 : $M^3 = \underset{\alpha}{\underset{\cup}{\Pi_1 \cup \Pi_2}}$, где $\alpha: M_r^2 \rightarrow M_r^2$, конечно неоднозначно и, кроме того, число r также зависит от выбора функции Морса на M^3 . Это представление M^3 в виде склейки двух заполненных поверхностей рода r часто называется «диаграммой Хегора» многообразия M^3 ; поскольку описанная выше склейка задается диффеоморфизмом $\alpha: M_r^2 \rightarrow M_r^2$, то иногда говорят, что задана диаграмма Хегора, если задан диффеоморфизм α . Ясно, что если два диффеоморфизма α_1 и α_2 гомотопны в классе диффеоморфизмов, то соответствующие трехмерные многообразия $M^3(\alpha_1)$ и $M^3(\alpha_2)$ (полученные склейкой по α_1 и по α_2) диффеоморфны.

Обратно, пусть задана некоторая диаграмма Хегора и $M^3(\alpha)$ — соответствующее ей трехмерное многообразие. Тогда на этом многообразии $M^3(\alpha)$ можно построить правильную функцию Морса f , которая определит (см. выше) разбиение $M^3(\alpha)$ в объединение двух многообразий Π_1 и Π_2 , совпадающее с исходной диаграммой Хегора. В самом деле, поскольку $M^3(\alpha) = \underset{\alpha}{\underset{\cup}{\Pi_1 \cup \Pi_2}}$, то достаточно построить на Π_1 и на Π_2 стандартные функции Морса f_1 и f_2 с критическими точками индексов 1 и 2 соответственно и одной критической точкой индекса 0 для функции f_1 , и одной критической точкой индекса 3 для функции f_2 ; при этом функции f_1 и f_2 следует выбрать так, чтобы они были постоянны на краях Π_1 и Π_2 . Склейв Π_1 и Π_2 по заданному диффеоморфизму, мы и получаем на M^3 гладкую функцию Морса со всеми требуемыми свойствами.

Число r (род поверхности M^2) называется родом диаграммы Хегора.

Доказанная выше теорема может быть переформулирована следующим образом:

Утверждение. Любое трехмерное связное гладкое компактное многообразие может быть представлено в виде объединения двух трехмерных шаров с ручками, поверхности которых отождествлены посредством некоторого гомеоморфизма (диффеоморфизма).

Связь с предыдущей формулировкой осуществляется так: каждое из многообразий Π_1 и Π_2 гомеоморфно шару с r ручками.

В том случае, когда $r = 0$, многообразие $M^3(\alpha)$ получается склейкой двух трехмерных шаров по диффеоморфизму α их границ, т. е. по диффеоморфизму двумерной сферы на себя. Ясно, что тогда $M^3(\alpha)$ диффеоморфно стандартной трехмерной сфере. Рассмотрим более нетривиальный случай и опишем все диаграммы Хегора рода 1, т. е. опишем все те трехмерные многообразия, которые получаются путем склейки двух полных торов: $\Pi_1 = S^1 \times D^2$, $\Pi_2 = S^1 \times D^2$ по некоторому диффеоморфизму их границ, т. е. по диффеоморфизму $\alpha: T^4 \rightarrow T^2$, где T^2 — двумерный тор.

Теорема 2. Любое трехмерное гладкое компактное связное замкнутое многообразие, допускающее диаграмму Хегора рода 1,

гомеоморфно (и, следовательно, диффеоморфно) одному из следующих трехмерных многообразий: 1) стандартная сфера S^3 ; 2) $S^1 \times S^2$; 3) линзовое пространство $L^3(1, k)$, где многообразие $L^3(1, k)$ получается из трехмерной сферы S^3 путем ее факторизации по гладкому действию группы \mathbb{Z}_p , задаваемому следующей формулой:

$$(z, w) \rightarrow \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} \cdot z; e^{\frac{2\pi i k}{p}} \cdot w \right);$$

здесь (z, w) — комплексные координаты в $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$; $S^3 = \{ |z|^2 + |w|^2 = 1 \}$. Линза $L^3(1, 1) = S^3/\mathbb{Z}_2$ диффеоморфна проективному пространству \mathbb{RP}^3 (при $p = 2$).

Доказательство. В силу предыдущей теоремы достаточно дать классификацию всех классов изотопий диффеоморфизмов двумерного тора на себя. Поскольку тор является пространством типа $K(\pi, 1)$, то гомотопическая классификация непрерывных отображений тора на себя дается множеством гомоморфизмов фундаментальной группы $\pi_1(S^1 \times S^1)$ в себя; так как мы хотим ограничиться только диффеоморфизмами, то достаточно описать все изоморфизмы группы $\pi_1(S^1 \times S^1)$ на себя. Так как группа $\pi_1(T^2)$ изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, то, следовательно, множество всех диффеоморфизмов α тора на себя (сохраняющих его ориентацию) задается унимодулярными целочисленными матрицами $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $ad - bc = 1$; если же диффеоморфизм меняет ориентацию, то $ad - bc = -1$. Будем считать, что на торе фиксированы стандартные параллель и меридиан, образующие базис в фундаментальной группе (она же — группа гомологий), относительно которого и записывается матрица $\alpha_s = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Найдем фундаментальную группу многообразий $M^3(\alpha)$, где $\alpha_s = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $ad - bc = 1$. Так как M^3 представлено в виде склейки двух полноторий (полных торов), каждое из которых гомотопически эквивалентно окружности, то фундаментальная группа M^3 получается так: нужно рассмотреть образующие γ_1 и γ_2 и задать соотношение между γ_1 и γ_2 , имеющее в данном конкретном случае вид $\gamma_1^c = \gamma_2^c = 1$ (запись группы — мультиликативная). Отсюда следует, что $\pi_1(M^3(\alpha)) = \mathbb{Z}_c$. Так, например, если матрица $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ имеет вид $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, то соответствующее многообразие M^3 гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times S^2$; если же $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, то M^3 гомеоморфно сфере S^3 . В первом случае $\pi_1(M^3) = \mathbb{Z}$, во втором $\pi_1(M^3) = 0$. Приведенные сейчас два гомеоморфизма геометрически очевидны: в первом случае окружность S^1 соответствует оси одного из полных торов, а двумерная сфера возникает в результате отождествления

двух двумерных дисков по тождественному отображению их границ (см. матрицу склейки); во втором случае два полных тора склеиваются так, что параллель и меридиан меняются местами (с сохранением ориентации тора); соответствующее разбиение трехмерной сферы в сумму двух полных торов может быть задано так:

$$\Pi_1 = S^3 \cap \{|z| \geq |w|\}; \quad \Pi_2 = S^3 \cap \{|z| \leq |w|\};$$

существует ортогональное преобразование сферы, переводящее Π_1 в Π_2 (и наоборот) и задающееся формулой $(z, w) \rightarrow (w, z)$. Итак, мы нашли фундаментальную группу многообразий $M^3(\alpha)$, где α задает диаграмму Хегора рода 1. Если группа $\pi_1(M^3(\alpha))$ тривиальна, то $M^3(\alpha)$ — гомотопическая сфера (что сразу следует из двойственности Пуанкаре) и, будучи представлена в виде склейки двух полных торов, гомеоморфна стандартной сфере.

Если $\pi_1(M^3(\alpha)) = \mathbb{Z}$, то $c = 0$, т. е. $ad = 1$; отсюда либо $a = d = 1$, либо $a = d = -1$ (значение b — несущественно). Ясно, что многообразие $M^3(\alpha)$, задаваемое целочисленной матрицей $\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, гомеоморфно $S^1 \times S^2$.

Если же $\pi_1(M^3(\alpha))$ нетривиальна и изоморфна \mathbb{Z}_c , где $c \neq 0, 1$, то переходя к накрытию $\tilde{M}^3(\alpha)$, получаем, что это накрытие также допускает диаграмму Хегора рода 1, поскольку накрытие над тором регулярно и является снова тором; так как, кроме того, $\tilde{M}^3(\alpha)$ имеет тривиальную фундаментальную группу, то в силу предыдущего рассуждения $\tilde{M}^3(\alpha)$ гомеоморфно стандартной сфере. Отсюда следует, что исходное многообразие $M^3(\alpha)$ получается из стандартной трехмерной сферы путем ее факторизации по действию группы \mathbb{Z}_c (действие было описано выше). Теорема доказана.

Такой простой ответ может быть получен только для диаграмм Хегора рода 1; если же многообразие M^3 не допускает ни одной диаграммы Хегора рода 1, то описание M^3 резко усложняется.

Дополним информацию о линзовом многообразиях $L^3(1, k)$. Как видно из определения гладкого действия \mathbb{Z}_c на S^3 , факторпространство является многообразием, а проекция $S^3 \rightarrow L^3(1, k)$ — накрытием (действие группы \mathbb{Z}_c на S^3 свободно и эффективно). Ясно, что все линзовы многообразия допускают диаграмму Хегора рода 1. В самом деле, уравнение $|z| = |w|$ задает разбиение S^3 в сумму двух стандартных полноторий (см. описание выше):

$S^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$. При действии $(z, w) \rightarrow \left(e^{\frac{2\pi i}{c}} \cdot z, e^{\frac{2\pi i k}{c}} \cdot w \right)$ группы \mathbb{Z}_c тор $|z| = |w|$ переходит в себя, а потому при факторизации S^3 по действию \mathbb{Z}_c тор $|z| = |w|$ проектируется на тор, являющийся тором диаграммы Хегора многообразия $L^3(1, k)$. Ясно, что возникающее отображение тора на себя (накрытие) может быть записано в терминах матрицы $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Легко показать, что линзовидные многообразия $L^{2n-1}(p_1, \dots, p_n)$ и $L^{2n-1}(p'_1, \dots, p'_n)$ (задаваемые действием группы Z_c на S^{2n-1} по формуле:

$$(z_1, \dots, z_n) \rightarrow \left(e^{\frac{2\pi i p_1}{c}} \cdot z_1, e^{\frac{2\pi i p_2}{c}} \cdot z_2, \dots, e^{\frac{2\pi i p_n}{c}} \cdot z_n \right)$$

гомеоморфны, если для каждого i сумма $p_i + p'_i$ или разность $p_i - p'_i$ кратна c .

Задача классификации всех трехмерных многообразий не только не решена, но и неизвестно даже, является ли она в некотором точном смысле алгоритмически разрешимой (наподобие того, как алгоритмически разрешима задача классификации двумерных многообразий).

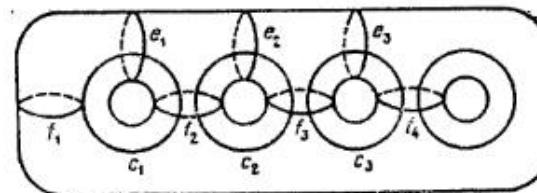


Рис. 117.

Как было показано выше, для создания списка, содержащего заведомо все трехмерные многообразия (это задача не совпадает с проблемой классификации, являясь более простым вопросом), достаточно составить список классов изотопных диффеоморфизмов поверхности рода r на себя. Оказывается, такой список может быть построен. На рис. 117 изображена двумерная поверхность рода r с тремя ориентированными семействами окружностей c_i, e_i, f_i . Операцией T_s^e ($e = \pm 1$), соответствующей окружности s на поверхности M_r^2 , назовем следующий диффеоморфизм $T_s^e: M_r^2 \rightarrow M_r^2$. Обозначим через U_s замкнутую λ -окрестность окружности s , т. е. U_s диффеоморфно $S^1 \times [0, 1]$. Определим T_s^e тождественным отображением на $M_r^2 \setminus U_s$, а диффеоморфизм $T_s^e: U_s \rightarrow U_s$ строим, поворачивая окружность $S^1 \times t$ на угол $2\pi t$, причем знак e зависит от направления вращения. Имеет место следующий весьма важный и нетривиальный факт (доказательство которого мы опускаем): всякий класс изотопных диффеоморфизмов двумерной поверхности M_r^2 на себя содержит представителя, разлагающегося в произведение (композицию) операций вида T_s^e , где s — любые из окружностей трех систем: c_i, e_i, f_i . Отсюда вытекает следствие:

можно составить список классов изотопных диффеоморфизмов двумерной поверхности M_r^2 , рассматривая всевозможные конечные произведения вида $\prod T_{s_j}^{e_j}$, где $s_j \in \{c_i\}, \{e_i\}, \{f_i\}$.

§ 25. Унитарная периодичность Ботта и многомерные вариационные задачи

В этом параграфе мы докажем важный топологический факт, обычно называемый «периодичностью Ботта»; для простоты остановимся только на теореме периодичности для унитарной группы (так называемая ортогональная периодичность Ботта доказывается по той же схеме, что и унитарная периодичность, но с большими техническими сложностями).

I. Теорема унитарной периодичности.

Теорему периодичности мы докажем в ее классическом варианте в виде периодичности гомотопических групп стабильной унитарной группы, не вникая здесь в изучение роли теоремы периодичности в теории векторных расслоений.

Теорема унитарной периодичности. Имеет место изоморфизм: $\pi_{i-1}SU_{2m} \cong \pi_{i+1}SU_{2m}$ при $1 < i < 2m$. Если $U = \varprojlim U_m$ (где $U_m \subset U_{m+1}$ — стандартное вложение), то

$$\pi_{i-1}U = \pi_{i+1}U \text{ при } i \geq 1 \text{ и } \pi_{2m}U = 0; \pi_{2m+1}U = \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим специальную унитарную группу SU_{2m} и через $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}; -E_{2m})$ (где $E_{2m} \in SU_{2m}$ — тождественное преобразование) обозначим функциональное пространство кусочно-гладких путей, идущих в группе SU_{2m} из точки E_{2m} в точку $-E_{2m}$. Через $\Omega^*(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ обозначим полное пространство всех непрерывных путей из E_{2m} в $-E_{2m}$; тогда вложение $\Omega \rightarrow \Omega^*$ является гомотопической эквивалентностью (см. выше элементы общей теории Морса для пространства петель на гладком многообразии).

В пространстве $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ рассмотрим подпространство $\tilde{\Omega}$, образованное всеми минимальными геодезическими (т. е. геодезическими наименьшей длины), идущими из точки E_{2m} в точку $-E_{2m}$.

Лемма 1. Пространство Ω гомеоморфно комплексному многообразию Грассмана $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$, т. е. многообразию m -мерных комплексных плоскостей в комплексном линейном пространстве \mathbb{C}^{2m} .

Доказательство. Как было доказано в ч. I книги [1], геодезическими на группе Ли (относительно римановой связности, согласованной с инвариантной метрикой на группе) являются все однопараметрические подгруппы и их сдвиги с помощью какого-либо произвольного элемента группы. Поэтому для того, чтобы

описать все геодезические, соединяющие на группе SU_{2m} точки E_{2m} и $-E_{2m}$, достаточно описать все однопараметрические подгруппы, выходящие из точки E_{2m} и заканчивающиеся в точке $-E_{2m}$. Так как любая такая одномерная подгруппа $\gamma(t)$ в SU_{2m} имеет вид $\exp tX$, где матрица X косоэрмитова (т. е. принадлежит алгебре Ли su_{2m} группы SU_{2m}), то, считая, что параметр t изменяется от 0 до 1, получаем условие: $\gamma(0) = E_{2m}$, $\gamma(1) = \exp X = -E_{2m}$. Рассмотрим присоединенное действие Ad группы SU_{2m} на ее алгебре Ли; тогда хорошо известно (хотя бы из классического процесса ортогонализации в унитарном случае), что существует такое унитарное преобразование $g_0 \in SU_{2m}$, что $g_0 X g_0^{-1} = X_0$, где

$$X_0 = \begin{vmatrix} i\varphi_1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & i\varphi_{2m} \end{vmatrix}; \quad \varphi_1 + \dots + \varphi_{2m} = 0.$$

Другими словами, матрица X_0 принадлежит так называемой картановской подалгебре алгебры su_{2m} (т. е. максимальной коммутативной подалгебре в su_{2m}). Применив преобразование Ad_{g_0} к геодезической $\gamma(t)$, получаем:

$$g_0(\exp X)g_0^{-1} = \exp(g_0 X g_0^{-1}) = \begin{vmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & e^{i\varphi_{2m}} \end{vmatrix} = g_0(-E_{2m})g_0^{-1} = -E_{2m}.$$

Отсюда $\varphi_i = \pi k_i$, $k_i = 2l_i + 1$, $1 < i < 2m$, $l_i \in \mathbb{Z}$; $k_1 + \dots + k_{2m} = 0$. Тем самым мы описали все геодезические, соединяющие точки E_{2m} и $-E_{2m}$ в SU_{2m} . Осталось выбрать из них геодезические наименьшей длины. Так как отображение \exp осуществляет изометрию при отображении прямой tX на геодезическую $\exp(tX)$, то достаточно найти длину соответствующего отрезка в алгебре Ли, чтобы подсчитать расстояние от E_{2m} до $-E_{2m}$ вдоль геодезической $\gamma(t)$. Форма Киллинга на алгебре Ли su_{2m} имеет вид $\text{Sp } X \bar{Y}^T = \langle X, Y \rangle$; следовательно, длина геодезической $\exp(tX)$ от E_{2m} до $-E_{2m}$ равна

$$\sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\text{Sp } X \bar{X}^T} = \pi \sqrt{\sum_{i=1}^{2m} (k_i)^2}.$$

Отсюда ясно, что наименьшая длина геодезической равна $\pi \sqrt{2m}$, т. е. когда $k_i = \pm 1$. Так как, кроме того, $\text{Sp } X = \pi \sum_{i=1}^{2m} k_i = 0$, то матрица X имеет на диагонали равное число +1 и -1. Таким

образом, мы доказали, что все матрицы X такие, что $\exp \tilde{X} = -E_{2m}$ и $\exp tX$ — минимальная геодезическая получаются из одной фиксированной матрицы

$$X_0 = \begin{vmatrix} i & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -i & \cdots & -i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} iE_m & 0 \\ 0 & -iE_m \end{vmatrix}$$

путем применения к ней внутренних автоморфизмов вида: $X_0 \rightarrow gX_0g^{-1}$, где элемент g пробегает всю группу SU_{2m} . Следовательно, мы установили гомеоморфизм между множеством всех минимальных геодезических и множеством матриц вида gX_0g^{-1} , где $g \in SU_{2m}$. С другой стороны, это множество матриц, очевидно, гомеоморфно однородному пространству SU_{2m}/CX_0 , где через CX_0 обозначена стационарная подгруппа матрицы X_0 (т. е. подгруппа, составляющая матрицу X_0 на месте при присоединенном действии группы SU_{2m}). Так как, очевидно, имеется изоморфизм: $CX_0 = S(U_m \times U_m)$, то пространство SU_{2m}/CX_0 гомеоморфно комплексному многообразию Грассмана $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. Каждая минимальная геодезическая $\gamma(t)$, соединяющая точку E_{2m} с точкой $-E_{2m}$, однозначно задается своей серединой, т. е. точкой $\gamma(1/2)$. Таким образом, множество минимальных геодезических, т. е. множество их середин, гомеоморфно многообразию Грассмана $G_{2m, m}$, с другой стороны, совпадает с пересечением группы SU_{2m} с ее алгеброй Ли su_{2m} . При этом мы считаем, что как группа SU_{2m} , так и алгебра Ли su_{2m} реализованы как подмножества в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{2m^2} комплексных матриц размера $m \times m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть утверждения, а именно, то, что каждая минимальная геодезическая однозначно задается своей серединой, вытекает из формулы: $\exp(tX) = (\cos \pi t) E_{2m} + (\sin \pi t) X$. При $t = 0$ получаем E_{2m} , при $t = 1$ получаем точку $-E_{2m}$, а при $t = 1/2$ — матрицу X . Таким образом, середина геодезической $\gamma(t)$ совпадает с матрицей X . Ясно, что множество матриц X вида gX_0g^{-1} совпадает с множеством тех косоэрмитовых матриц, которые являются еще и унитарными, т. е. являются решениями матричного уравнения $X^2 = -E_{2m}$. Отсюда в частности, видно, что грассманово многообразие $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$ может рассматриваться как множество всех унитарных комплексных структур в пространстве \mathbb{C}^{2m} . Ясно также, что пересечение унитарной

группы SU_{2m} с линейным подпространством su_{2m} совпадает с множеством матриц X таких, что $X^2 = -E_{2m}$. Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Каждая неминимальная геодезическая γ , соединяющая точку E_{2m} с точкой $-E_{2m}$ на группе SU_{2m} , имеет индекс не меньший, чем $2m + 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению индекса геодезической мы должны сосчитать число точек, сопряженных с точкой E_{2m} вдоль геодезической γ (на ее отрезке от E_{2m} до $-E_{2m}$). Исходя из явной формулы для уравнения Якоби (решениями которого являются якобиевы поля вдоль геодезической), получаем, что все сопряженные точки определяются положительными собственными числами линейного преобразования $K_X: su_{2m} \rightarrow su_{2m}$, где оператор $K_X(Y) = R(X, Y)X = \frac{1}{4} [IX, Y], X]$ порожден оператором римановой кривизны (сводящимся для случая группы к тройному коммутатору (см. [1], ч. I, §§ 30, 36). Как было показано выше, можно считать, что матрица X диагональна и имеет вид

$$X = \begin{vmatrix} i\pi k_1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & i\pi k_{2m} \end{vmatrix}, \quad \text{где } k_l \geq k_{l+1}.$$

Из явной формулы для коммутатора получаем: $[X, Y] = i\pi(k_j - k_i)y_{ji}$, т. е. $K_X(Y) = \frac{\pi^2}{4}(k_j - k_i)^2y_{ji}$. Прямое вычисление показывает, что значения параметра t , при которых точка $\gamma(t)$ является сопряженной с точкой E_{2m} (вдоль γ), задаются следующими формулами: $t = \frac{2}{k_j - k_i}, \frac{4}{k_j - k_i}, \frac{6}{k_j - k_i}, \dots$ (для каждой пары i, j). На интервале $(0, 1)$ число этих сопряженных точек (при фиксированных i, j) равно $\frac{k_j - k_i}{2} - 1$. Считая, что $k_j > k_i$, получаем, что индекс геодезической γ задается формулой

$$\mu = \sum_{k_j > k_i} (k_j - k_i - 2).$$

Из этой формулы видно, что для минимальной геодезической индекс равен 0. Пусть геодезическая неминимальна; рассмотрим по отдельности два случая: а) среди чисел k_i по крайней мере $m + 1$ чисел имеют один знак; б) среди чисел k_i есть ровно m положительных чисел и m отрицательных, но не все они равны ± 1 . Получаем, что $\mu \geq 2m + 2$. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы унитарной периодичности, а именно: стабильные гомотопические группы $\pi_i U$ периодичны с периодом 2. Группы $\pi_0 U = \pi_2 U = \pi_4 U = \dots$ триангульны, а группы $\pi_1 U = \pi_3 U = \pi_5 U = \dots$ изоморфны группе Z .

Л е м м а 4. *Рассмотрим вложение множества минимальных геодезических (гомеоморфного комплексному грависманову многообра-*

зию $G_{2m, m}^C$) в пространство путей $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$. Тогда это вложение индуцирует изоморфизм гомотопических групп во всех размерностях, не превосходящих $2m$. Так как имеет место равенство $\pi_i \Omega X = \pi_{i+1} X$, то получаем окончательно, что $\pi_i G_{2m, m}^C = \pi_{i+1} SU_{2m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим на пространстве путей $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ функционал действия; его критические точки (на которых функционал достигает наименьшего значения) являются минимальными геодезическими, соединяющими точки E_{2m} и $-E_{2m}$ на SU_{2m} ; следовательно, это множество минимумов функционала гомеоморфно многообразию $G_{2m, m}^C$. В то же время, как было доказано выше, индекс всех других критических точек функционала (отличных от минимальных геодезических) не меньше, чем $2m + 2$. Применяя к этому функционалу теорию Морса (для случая вырожденных критических точек, заполняющих невырожденные критические подмногообразия), получаем, что пространство путей $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ (рассматриваемое как бесконечный клеточный комплекс) получается из многообразия абсолютных минимумов функционала действия путем приклейки к этому многообразию (гомеоморфному $G_{2m, m}^C$) клеток размерностей, не меньших, чем $2m + 2$. Отсюда и следует, что гомотопические группы пространства $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ размерностей $i < 2m$ совпадают с гомотопическими группами многообразия абсолютных минимумов функционала действия. Лемма доказана.

Л е м м а 5. *Имеет место изоморфизм: $\pi_{i-1} U_m = \pi_i G_{2m, m}^C$ при $i < 2m$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о (см. [1], ч. II, § 24). Рассмотрим стандартное расслоение $U_{m+1} \xrightarrow{U_m} S^{2m+1}$; из его точной гомотопической последовательности сразу получаем, что $\pi_{i-1}(U_m) = \pi_{i-1}(U_{m+1})$ при $i < 2m$. С другой стороны, из точной гомотопической последовательности расслоения $U_{2m} \xrightarrow{U_{2m}} U_{2m}/U_m$ теперь получаем, что $\pi_i(U_{2m}/U_m) = 0$ при $i < 2m$, что эквивалентно утверждению леммы. Доказательство закончено.

Собирая теперь вместе все эти утверждения, мы и получаем, наконец, теорему унитарной периодичности:

$$\begin{aligned} \pi_{i-1} U_m &\xleftarrow[\cong]{\partial} \pi_i G_{2m, m}^C \xrightarrow{\cong} \\ &\cong \pi_i \Omega^*(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m}) \simeq \pi_{i+1} SU_{2m} = \pi_{i+1} U_{2m}. \end{aligned}$$

Выпишем в явном виде эту цепочку изоморфизмов. Пусть $f_{i-1}: S^{i-1} \rightarrow U_m$ — непрерывное отображение, представляющее гомотопический класс $[f] \in \pi_{i-1} U_m$. Построим по этому отображению отображение $f_{i+1}: S^{i+1} \rightarrow SU_{2m}$. Для этого представим группу SU_2 как группу [матриц $\{p\}$, где $p = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{vmatrix}$, $|\alpha|^2 +$

$+|\beta|^2 = 1$, и выделим в группе SU_2 подмножество — двумерный диск ' D^2 ', задаваемый следующим условием: $p \in D^2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$. Затем вложим этот двумерный диск ' D^2 ' в группу SU_{2m} с помощью формулы

$$j: p \rightarrow p \otimes E_m = \begin{vmatrix} \alpha E_m & \beta E_m \\ -\beta E_m & \bar{\alpha} E_m \end{vmatrix}.$$

Далее, на диске ' D^2 ' рассмотрим гладкую кривую ' $\gamma(\beta) = \{p(\alpha, \beta) | \alpha = i\tau, \tau \in \mathbb{R}, \tau \geq 0\}$ '; положим $\gamma(\beta) = j(\gamma(\beta))$. Точки грассманова многообразия $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$ будем изображать инвариантными плоскостями, отвечающими собственному значению $\lambda = i$ операторов $g: \mathbb{C}^{2m} \rightarrow \mathbb{C}^{2m}$, $g \in SU_{2m}$, $g^2 = -E_{2m}$. Тогда для точки $\gamma \in \gamma(\beta)$ мы имеем: $\gamma^2 = -E_{2m}$, т. е. $\gamma(\beta) \in G_{2m, m}^{\mathbb{C}} \subset SU_{2m}$ при $0 < \beta < 1$. Рассмотрим в $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$ множество элементов g следующего вида:

$g = g(\sigma, i\tau, \beta) = [E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma)] \cdot [p(i\tau, \beta) \otimes E_m] \cdot [E_m \oplus f_{i-1}(\sigma)],$ где $\sigma \in S^{i-1}$, $f_{i-1}(\sigma) \in U_m$. При $\beta = 1$ мы получаем отображение сферы S^{i-1}

$$h: \sigma \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & f_{i-1}(\sigma) \\ -f_{i-1}^{-1}(\sigma) & 0 \end{vmatrix},$$

а при $0 < \beta < 1$ множество $\{g(\sigma, i\tau, \beta)\}$ представляется в виде образа сферы S^i , причем $\{g(\sigma, i\tau, \beta)\} \in G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$, $\partial[S^i] = [h]$ (где $\partial: \pi_i G_{2m, m}^{\mathbb{C}} \rightarrow \pi_{i-1} U_m$).

Теорема 1 (Фоменко). Пусть $f_{i-1}: S^{i-1} \rightarrow U_m$ представляет какой-либо элемент гомотопической группы $\pi_{i-1} U_m$. В силу теоремы периодичности, группы $\pi_{i-1} U_m$ и $\pi_{i+1} U_m$ изоморфны. Явная формула этого изоморфизма имеет следующий вид: $f_{i-1} \rightarrow f_{i+1}$, где

$$f_{i+1}: S^{i+1} \rightarrow U_{2m}; \quad f_{i+1}: S^{i+1} \rightarrow \{g(\sigma, \alpha, \beta)\} \subset SU_{2m};$$

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \alpha E_m & \beta f_{i-1}(\sigma) \\ -\beta f_{i-1}^{-1}(\sigma) & \bar{\alpha} E_m \end{vmatrix},$$

т. е. соответствие $f_{i-1} \rightarrow f_{i+1}$, сопоставляющее элементу гомотопической группы $\pi_{i-1} U_m$ некоторый элемент гомотопической группы $\pi_{i+1} U_m$, и задает изоморфизм периодичности.

Доказательство. Рассмотрим множество $\{g(\sigma, \alpha, \beta)\}$, где

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = [E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma)] \cdot [p(\alpha, \beta) \otimes E_m] \cdot [E_m \oplus f_{i-1}(\sigma)];$$

тогда $\{g(\sigma, \alpha, \beta)\}$ можно, очевидно, представить как образ сферы S^{i+1} при непрерывном отображении $f_{i+1}: S^{i+1} \rightarrow \{g(\sigma, \alpha, \beta)\} \subset SU_{2m}$. Таким образом, если $f_{i-1}(\sigma) \in U_m$ представляет собой

некоторый элемент гомотопической группы $\pi_{i-1} U_m$, то $f_{i+1} S^{i+1} \subset SU_{2m}$, и из описанной выше явной конструкции (с учетом классических изоморфизмов периодичности) сразу следует, что соответствие $f_{i-1} \rightarrow f_{i+1}$ и порождает изоморфизм унитарной периодичности. Явная формула:

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = f_{i+1}(S^{i+1}) = \begin{vmatrix} \alpha E_m & \beta f_{i-1}(\sigma) \\ -\beta f_{i-1}^{-1}(\sigma) & \bar{\alpha} E_m \end{vmatrix}$$

получается путем комбинирования граничного оператора (см. его явную запись выше) с отображением, сопоставляющим каждому «сферонду» (т. е. отображению сферы), образованному пучком минимальных геодезических, идущих из точки E_{2m} в точку $-E_{2m}$, сферонд, составленный из всех середин геодезических этого пучка; этот сферонд расположен в многообразии Грассмана. Теорема доказана.

Таким образом, с геометрической, наглядной точки зрения изоморфизм периодичности устроен достаточно просто.

Шаг 1. Нужно взять сферонд f_{i-1} из группы U_m и путем рассмотрения граничного оператора $\partial: \pi_i G_{2m, m}^{\mathbb{C}} \rightarrow \pi_{i-1} U_m$ перевести этот сферонд в сферонд, вложенный в многообразие Грассмана (явную формулу см. выше).

Шаг 2. Нужно взять получившийся сферонд в многообразии Грассмана, представить это многообразие как пересечение группы SU_{2m} с ее алгеброй Ли su_{2m} (при их вложении в линейное пространство всех комплексных матриц размера $2m \times 2m$), воспользоваться тем, что это пересечение в точности совпадает с множеством середин всех минимальных геодезических, идущих на группе SU_{2m} из точки E_{2m} в точку $-E_{2m}$, и рассмотрев все геодезические, середины которых заполняют сферонд в грассмановом многообразии, получить сферонд (на единицу большей размерности) уже в группе SU_{2m} . Этот сферонд и является образом исходного сферонда f_{i-1} при изоморфизме периодичности. Доказанная выше теорема задает этот изоморфизм явной формулой.

Если $m = 2$, то за исходное отображение $f_2: S^3 \rightarrow SU_2$ можно взять тождественное отображение $f_3(\sigma) = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix}$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$; тогда $[f_2] = 1 \in \pi_2 SU_2$. Переходя теперь к $m = 2^k, 2^k, 2^k$, получаем отображение $f_{2k+1}: S^{2k+1} \rightarrow SU_2^k$, где $[f_{2k+1}] = 1 \in \pi_{2k+1} SU_2^k$, $k \geq 1$. Отметим, наконец, что отображение f_{2k+1} совпадает с известным в теории клиффордовых алгебр и спинорных представлений ортогональной группы отображением «двойственности» α_{2k+1} , если только в определении этого отображения заменить поле коэффициентов \mathbb{C} на поле вещественных чисел \mathbb{R} .

Мы приведем это сопоставление, так как это дает еще одну явную формулу для изоморфизма унитарной периодичности, еще более упрощая геометрическую картину. Отображение α_{2k+1}

построим следующим образом. Пусть $f: S^{n-1} \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$, $g: S^{m-1} \rightarrow GL(M; \mathbb{C})$ — два непрерывных отображения. Так как $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$, то отображения f и g можно продолжить (по однородности) на евклидовые пространства \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m соответственно. Определим отображение $\omega: \mathbb{R}^{n+m} \setminus 0 \rightarrow GL(2MN; \mathbb{C})$, положив

$$f * g = \omega(x, y) = \begin{vmatrix} f(x) \otimes E_M & -E_N \otimes g^*(y) \\ E_N \otimes g(y) & f^*(x) \otimes E_N \end{vmatrix},$$

где $f^* = f^T$, $g^* = g^T$; $(x, y) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Так как $\omega = f * g$ определено на $\mathbb{R}^{n+m} \setminus 0$, то возникает отображение $S^{n+m-1} \rightarrow GL(2MN; \mathbb{C})$. Если $\alpha: S^1 \rightarrow GL(1; \mathbb{C})$, $\alpha(z) = z$, $|z| = 1$, то $\alpha_{2k+1} = \alpha * \alpha * \dots * \alpha$ ($2k+1$ раз). Если в качестве α_{2k+1} взять отображение $S^{2k+1} \rightarrow SU_{2k}$, соответствующее отображению α_{2k+1} , то, очевидно, получим тождество $\alpha_{2k+1} \equiv f_{2k+1}$.

II. УНИТАРНАЯ ПЕРИОДИЧНОСТЬ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ.

Описанная выше теорема периодичности основана на теории одномерных функционалов (а именно, функционала действия, определенного на траекториях в унитарной группе). Оказывается, более естественным образом изоморфизм периодичности возникает при рассмотрении многомерной (в данном случае — двумерной) вариационной задачи.

При классическом подходе изоморфизм унитарной периодичности распадается в композицию двух изоморфизмов, каждый из которых повышает размерность гомотопической группы на единицу. Тот факт, что требуемое повышение размерности на две единицы получается в результате выполнения этих двух шагов (см. их описание в предыдущем параграфе), вполне соответствует методу классического доказательства, использующего одномерные функционалы действия и длины, определенные на пространствах отображений одномерного диска D^1 (отрезка). Рассмотрим этот процесс более подробно. Пусть фиксирован одномерный диск D^1 ; $\partial D^1 = S^0$ (нульмерная сфера); тогда $\Pi_1 = \Omega^*(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ есть пространство непрерывных отображений f диска D^1 в группу SU_{2m} , при которых $f|_{S^0} = i_0|_{S^0}$, где $i_0 S^0 = (E_{2m}, -E_{2m})$, т. е. граница диска все время переходит в одну и ту же пару фиксированных точек. Функционал действия E на пространстве $\Pi_1 = \Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ определяется так:

$$E_0^1(\omega) = \int_0^1 \left| \frac{d\omega}{dt} \right|^2 dt,$$

где $\omega(0) = E_{2m}$; $\omega(1) = -E_{2m}$. С этим функционалом естественно связан функционал длины $L_0^1(\omega) = \int_0^1 \left| \frac{d\omega}{dt} \right| dt$. Как было показано в ч. I книги [1], изучение критических точек (экстремалей) функционала L сводится к изучению свойств и экстремалей функционала E . Множество точек (траекторий), на которых функционал действия E (а, следовательно, и функционал длины L) достигает абсолютного минимума, есть некоторое подпространство в пространстве Π_1 , гомеоморфное многообразию Грасмана $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$, а потому (как это следует из одномерной теории Морса) $(2m)$ -мерный остов пространства Π_1 гомотопически эквивалентен $(2m)$ -мерному остову пространства $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$. Иными словами, можно сказать, что аналитическая часть изоморфизма унитарной периодичности заключена в изоморфизме

$$\pi_i(G_{2m, m}^{\mathbb{C}}) = \pi_i(\Pi_1) = \pi_i(\Pi_1) = \pi_{i+1}(SU_{2m}).$$

поскольку следующий шаг: $\pi_i(G_{2m, m}^{\mathbb{C}}) = \pi_{i-1}(U_m)$ является следствием уже чисто гомотопического факта, не имеющего какого-либо отношения к функционалу E .

Описанный выше геометрический механизм изоморфизма периодичности наводит на мысль о возможности получить этот изоморфизм не в два шага, а в один шаг, если использовать вместо одномерной вариационной задачи — двумерную, т. е. подобрать подходящий двумерный функционал. Оказывается, эта возможность действительно имеется; в частности, это еще более упростит геометрическую картину изоморфизма периодичности. Переходим к изучению многомерной вариационной задачи.

Мы получим изоморфизм периодичности, рассматривая двумерные функционалы на специально подобранном пространстве отображений. Рассмотрим в группе SU_{2m} вложенную окружность

$$S_0^1 = \begin{vmatrix} \alpha E_m & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} E_m \end{vmatrix}, \quad |\alpha| = 1,$$

являющуюся однопараметрической подгруппой, и зафиксируем ее. Здесь мы поступаем по аналогии с одномерным случаем, когда в группе SU_{2m} фиксировалась нульмерная сфера $S^0 = \{E_{2m}, -E_{2m}\}$. Пусть D^2 есть двумерный диск с границей S^1 в своей стандартной евклидовой метрике; фиксируем отображение $j_0: S^1 \rightarrow SU_{2m}$, переводящее окружность S^1 изометрично на окружность S_0^1 .

Через Π_2 обозначим топологическое пространство всех непрерывных отображений $f: D^2 \rightarrow SU_{2m}$ таких, что $f|_{S^1} = j_0$. Пространство Π_2 имеет гомотопический тип клеточного комплекса. Рассмотрим подпространство $\Pi'_2 \subset \Pi_2$, образованное всеми отображен-

ниями f из функционального пространства $H_1^2(D^2)$, где пространство $H_1^2(D_2)$ определено ниже, для аккуратности и точной постановки задачи.

Пусть G есть область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^v(x^1, \dots, x^v)$. Мы скажем, что функция $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу функций $H_m^p(G)$, если и только если: 1) $u \in L_p(G)$, т. е. суммируема в p -й степени; 2) существуют «обобщенные производные» $D^\alpha u$, т. е. такие функции $r_\alpha \in L_p(G)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_v)$, $0 < |\alpha| < m$, что для любой бесконечно гладкой финитной функции g верно тождество:

$$\int_G g(x) r_\alpha(x) dx = \int_G |D^\alpha g(x)| u(x) dx.$$

Здесь $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$; $D^\alpha g = \partial^{|\alpha|}(g)/(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^v)^{\alpha_v}$. Если $m = 1$, то $|\alpha| = 1$.

Если $f: D^2 \rightarrow SU_{2m}$, то $f \in H_1^2(D^2)$ в том и только в том случае, когда порожденные этим отображением координатные функции принадлежат $H_1^2(D^2)$. Требованием принадлежности отображения f к классу $H_1^2(D^2)$ мы заменяем требование кусочной гладкости отображения f в одномерном случае (необходимым для построения одномерной теории Морса).

Определим на пространстве Π_2 функционал Дирихле $D: \Pi_2 \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющий каждому отображению $f \in \Pi_2$ значение интеграла Дирихле $D[f]$ на отображении f (см. определение ниже). Этот функционал Дирихле является двумерным аналогом одномерного функционала действия, в то время как функционал двумерной площади — аналог одномерного функционала длины (см. [1], ч. II, § 32). Напомним определение функционала Дирихле. Функции $r_\alpha(x)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_v)$, называются производными функциями u и обозначаются $D^\alpha(u)$ или u_α ; если $\alpha = 0$, то $u_0 = u$. Пусть теперь M и V суть римановы многообразия с метрическими тензорами $g_{ij}(x)$, $x \in M$; $\hat{g}_{ab}(v)$, $v \in V$. С каждым отображением $f: V \rightarrow M$, где $f \in H_1^2(V, M)$, связываются тензоры смешанного типа; так, например, $x'_\alpha = x^i, _\alpha$, где x^i — локальные координаты точки $x = f(v) \in M$, а дифференцирование понимается в указанном выше смысле. Через ∇_α будем обозначать полную ковариантную производную от смешанного тензора. Определим скалярное произведение двух тензоров x'_α и y'_β , положив $(x'_\alpha, y'_\beta) = \hat{g}_{ab} g_{ij} x'^i_\alpha y'^j_\beta$. Пусть теперь $f \in H_1^n(V, M)$; положим

$$D[f] = \int_V \left[\frac{1}{n} (x'_\alpha, x'_\beta) \right]^{\frac{n}{2}} dv,$$

где dv есть элемент риманова объема на римановом многообразии

V , а $n = \dim V$. Отображение $f \in H_1^n(V, M)$ называется гармоническим, если $\delta D[f; \eta] = 0$ для любого векторного поля $\eta(f)$ класса H_1^n , определенного на $f(V)$. Соответствующее уравнение Эйлера для функционала $D[f]$ имеет следующий вид: $\nabla^\alpha \nabla_\alpha x^i = 0$. Этот факт проверяется прямым вычислением.

В нашем случае в качестве многообразия V мы возьмем двумерный диск D^2 ; тогда $\hat{g}^{ab}(v) = \delta^{ab}$, и функционал Дирихле (двумерный аналог функционала действия) $D[f]$ принимает вид

$$D[f] = \frac{1}{2} \int_V [(x'_1, x'_1) + (x'_2, x'_2)] dv = \frac{1}{2} \int_V g_{ij}(x'_i x'_j + x'_2 x'_2) dv,$$

где g_{ij} — метрика группы SU_{2m} .

При этом группа реализована в пространстве S^{N-1} и метрика g_{ij} есть ограничение евклидовой. Первая вариация δD функционала D имеет вид $\delta D[f; \eta] = \int_V (x'_\alpha, \nabla_\beta \eta^\beta) dv$. Если двумерный диск D^2 параметризован с помощью евклидовых координат u и v , то получаем:

$$D[f] = \frac{1}{2} \int_V [(x_u, x_u) + (x_v, x_v)] du dv, \quad x = (x^1, \dots, x^p),$$

$$p = \dim M; \quad \delta D[f; \eta] =$$

$$= \int_V \left[\left(\frac{D\eta}{du}; x_u \right) + \left(\frac{D\eta}{dv}, x_v \right) \right] du dv; \quad \eta \in H_1^2(D^2).$$

На пространстве отображений Π_2 рассмотрим еще один функционал $A[f]$, сопоставляющий каждому отображению $f \in \Pi_2$ значение следующего интеграла: $\int_V \sqrt{\det \Omega} du dv$, где

$$\Omega = \begin{vmatrix} (x_u, x_u) & (x_u, x_v) \\ (x_v, x_u) & (x_v, x_v) \end{vmatrix},$$

т. е. функционал $A[f]$ является функционалом двумерной площади. Хорошо известно (см. [1], с. 363), что имеет место неравенство $A[f] \leq D[f]$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда отображение f обобщенно-конформное. Например, для случая двумерных минимальных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве это означает, что минимальный радиус-вектор поверхности всегда гармоничен в конформных координатах (т. е. в таких, в которых индуцированная риманова метрика имеет диагональный вид). Отметим, что здесь также наблю-

дается аналогия с одномерным случаем (см. выше пространство путей с фиксированными концами), а именно: функционалы действия E и длины L связаны аналогичным соотношением: $L^2(\omega) \ll E(\omega)$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда отображение ω задает минимальную геодезическую (отнесенную к натуральному параметру), идущую из точки $\omega(0)$ в точку $\omega(1)$.

Точно так же, как и функционал действия E , двумерный функционал Дирихле D позволяет отбросить все те отображения f , которые отличаются от гармонического отображения f_0 только непрерывной заменой параметров в диске D^2 , что не меняет значения функционала площади, но меняет, вообще говоря, значение функционала Дирихле.

Отметим для дальнейшего, что имеет место изоморфизм $\beta_s: \pi_s(\Pi_2) \cong \pi_{s+2}(SU_{2m})$ и что пространство Π_2 гомотопически эквивалентно пространству $\tilde{\Pi}_2$ всех непрерывных отображений $S^2 \rightarrow SU_{2m}$ с фиксированной точкой. Первое утверждение является очевидным следствием точной последовательности расслоения двукратных петель.

Теорема 2 (Фоменко). *Рассмотрим группу SU_{2m} и функциональные пространства Π_2 и $\tilde{\Pi}_2$. В пространстве $\tilde{\Pi}_2$ рассмотрим подмножество W , состоящее из всех точек (т. е. непрерывных отображений) f , на которых функционал Дирихле $D[f]$ достигает абсолютного минимума. Тогда выполняются следующие утверждения:*

а) множество W гомеоморфно (как топологическое пространство) группе U_m ;

б) вложение $i: W \rightarrow \tilde{\Pi}_2 \rightarrow \Pi_2$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп $i_*: \pi_s U_m \rightarrow \pi_s \Pi_2$ при $s < 2m$; поэтому $(2m)$ -мерный остаток пространства Π_2 гомотопически эквивалентен $(2m)$ -мерному остатку группы U_m , и композиция $\beta_{s+2} \circ i_*: \pi_s U_m \xrightarrow{\cong} \pi_{s+2} SU_{2m}$ является изоморфизмом унитарной периодичности при $s < 2m$. Таким образом, использование двумерного функционала Дирихле и рассмотрение множества его абсолютных минимумов позволяет получить изоморфизм унитарной периодичности в один шаг (сразу с повышением размерности гомотопических групп на две единицы), в отличие от «двух шагов» при использовании одномерных функционалов действия и длины.

Доказательство теоремы проведем в виде цепочки нижеследующих лемм. Сначала рассмотрим в группе SU_{2m} двумерную сферу, задаваемую формулой:

$$S_0^2 = \begin{vmatrix} \alpha E_m & \beta E_m \\ -\beta E_m & \bar{\alpha} E_m \end{vmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Одна из ее полусфер, а именно, полусфера, задаваемая неравенством $\beta \geq 0$, совпадает с двумерным диском D_0^2 , вложение которого

в группу SU_{2m} было осуществлено выше. Экватором $\{\beta = 0\}$ сферы S_0^2 является окружность S_0^1 . Поскольку вложение сферы $S_0^2 \rightarrow SU_{2m}$ продолжается до вложения $SU_2 \rightarrow SU_{2m}$, то сфера S_0^2 является вполне геодезическим подмногообразием в группе SU_{2m} , и тем более — минимальным подмногообразием. Напомним, что подмногообразие называется вполне геодезическим, если любая геодезическая, касающаяся в какой-то точке этого подмногообразия, целиком в нем лежит. То, что любое вполне геодезическое подмногообразие локально минимально, следует из явного вида тензора кривизны Римана, ограниченного на вполне геодезическое подмногообразие. В группе Ли тензор кривизны Римана на вполне геодезическом подмногообразии является частью тензора Римана в объемлющей группе, распадающегося в прямую сумму.

Таким образом, и диск D_0^2 является вполне геодезическим подмногообразием в группе SU_{2m} . Рассмотрим множество W' вполне геодезических дисков $D^2(x) \subset SU_{2m}$, имеющих вид $D^2(x) = x D_0^2 x^{-1}$, где $x \in SU_{2m}$ и $x s x^{-1} \equiv s$ при любом $s \in S_0^1$.

Лемма 6. *Множество W' гомеоморфно пространству U_m .* Доказательство. Пусть $D^2(x) \in W'$; тогда $xs = sx$ для любого $s \in S_0^1$. Так как $S_0^1 = \{\alpha E_m + \bar{\alpha} E_m, |\alpha| = 1\}$, то отсюда следует, что $x = A \oplus D$, где $A, D \in U_m$, т. е. $x = (E_m \oplus DA^{-1})(A \oplus A) = x_1(A \oplus A)$, $x_1 = E_m \oplus DA^{-1}$. Поскольку $(A \oplus A)d = d \cdot (A \oplus A)$ при любом $d \in D_0^2$ и любом $A \in U_m$, то

$$D^2(x) = D^2(x_1) = \begin{vmatrix} \alpha E_m & \beta C \\ -\beta C^{-1} & \bar{\alpha} E_m \end{vmatrix}, \quad C = DA^{-1}.$$

Так как $\beta \geq 0$, то этим условием матрица C определяется однозначно. Итак, каждому диску $D^2(x)$ мы сопоставили элемент $C \in U_m$, где $C = C[D^2(x)]$. Пусть $C[D^2(x)] = C[D^2(x')]$; тогда очевидно, что $x' \cdot x'^{-1} \in \{A \oplus A\}$, а потому диски $D^2(x)$ и $D^2(x')$ совпадают. Обратно, если $C \in U_m$, то $C = C[D^2(x)]$, где $x = E_m \oplus C$, т. е. построенное соответствие $D^2(x) \rightarrow C[D^2(x)]$ является требуемым гомеоморфизмом между W' и U_m . Лемма доказана.

Построим теперь вложение $i: U_m \rightarrow \tilde{\Pi}_2$. Пусть $g \in U_m$; тогда по этому элементу однозначно строится двумерный диск

$$D^2(E_m \oplus g) = \begin{vmatrix} \alpha E_m & \beta g \\ -\beta g^{-1} & \bar{\alpha} E_m \end{vmatrix},$$

причем, если $g_1 \neq g_2$, то $D^2(E_m \oplus g_1) \cap D^2(E_m \oplus g_2) = S_0^1$. Пусть $i_0: D^2 \rightarrow D_0^2$ есть наше фиксированное отображение. Положим $i(g)\xi = (E_m \oplus g) \cdot i_0(\xi) \cdot (E_m \oplus g^{-1})$, где $\xi \in D^2$. Ясно, что $i: g \rightarrow i(g)$ есть искомое вложение $U_m \rightarrow \tilde{\Pi}_2$. Из доказанной выше леммы следует, что множество отображений $i(U_m) \subset \tilde{\Pi}_2$ совпадает с множеством отображений вида $Ad_x \circ i_0$, где элемент x пробегает всю группу $G = \{A \oplus A\} \subset U_{2m}$; $G \cong U_m$, т. е. множество $i(U_m)$

является орбитой точки $i_0 \in \Pi_2$ при присоединенном действии группы G на множество отображений Π_2 .

Лемма 7. Гомоморфизм $\beta_2 \circ i_*: \pi_s(U_m) \rightarrow \pi_{s+2}(SU_{2m})$ совпадает с изоморфизмом унитарной периодичности.

Доказательство. Пусть $f: S^s \rightarrow U_m$, $f \in [f] \in \pi_s(U_m)$, $\sigma \in S^s$. Тогда

$$[(\beta_2 \circ i_*)(f)](\sigma) = D^2 [E_m \oplus f(\sigma)] = \begin{bmatrix} \alpha E_m & \beta f(\sigma) \\ -\beta f^{-1}(\sigma) & \alpha E_m \end{bmatrix}.$$

Из предыдущего параграфа и из одномерной теории Морса немедленно следует, что гомоморфизм $\beta_2 \circ i_*$ совпадает с изоморфизмом унитарной периодичности, если $s < 2m$. Поскольку β_2 является изоморфизмом в любой размерности, то отсюда следует, что гомоморфизм $i_*: \pi_s(U_m) \rightarrow \pi_{s+2}(\Pi_2)$ тоже является изоморфизмом при $s < 2m$, а потому $(2m)$ -мерный остов Π_2 гомотопически эквивалентен $(2m)$ -мерному остову $i(U_m)$. Лемма доказана.

Итак, вложение $i: U_m \rightarrow \Pi_2$ удовлетворяет всем необходимым требованиям. Осталось показать, что выполнено равенство: $i(U_m) = W$.

Рассмотрим евклидово пространство \mathbb{R}^{8m^2} , отождествляемое с комплексным пространством \mathbb{C}^{4m^2} всех комплексных матриц размера $2m \times 2m$, снабженным билинейной формой $\phi(A, B) = \text{Re}(\text{Sp } AB^*)$, $B^* = \bar{B}^T$. Тогда группа SU_{2m} изометрично вкладывается в сферу S^{8m^2-1} радиуса $\sqrt{2m}$ как гладкое подмногообразие, на котором индуцируется специальная риманова метрика, инвариантная по отношению к правым и левым сдвигам на группе SU_{2m} . Эта метрика, очевидно, совпадает с метрикой Киллинга. Поэтому многие метрические соотношения в группе SU_{2m} выгодно рассматривать с точки зрения объемлющей сферы S^{8m^2-1} . Извлечем первое следствие из существования такого изометрического вложения группы в сферу. Так, например, в группе SU_{2m} не существует бесконечно малых вариаций (возмущений) двумерного диска D_0^2 , оставляющих границу этого диска $S_0^1 = \partial D_0^2$ неподвижной, таких, чтобы возмущенный диск \tilde{D}_0^2 был бы минимальным диском в группе SU_{2m} , но не вполне геодезическим. В самом деле, пусть такая вариация существует. Заметим, что окружность $S_0^1 \subset SU_{2m} \subset S^{8m^2-1}$ является окружностью большого круга в сфере S^{8m^2-1} , а диск D_0^2 является центральным плоским сечением сферы S^{8m^2-1} трехмерной плоскостью, проходящей через начало координат в \mathbb{R}^{8m^2} . Так как диск \tilde{D}_0^2 не является (по предположению) вполне геодезическим в группе SU_{2m} , то он не вполне геодезический и в сфере S^{8m^2-1} , т. е. он не получается из диска D_0^2 путем поворота вокруг окружности S_0^1 . Из этого следует, что его площадь строго больше площади диска D_0^2 в линейном приближении, т. е. $\delta A > 0$. Поэтому диск \tilde{D}_0^2 не является минимальным

диском, что противоречит предположению. Итак, любая вариация любого диска $D^2(x) \in W'$ либо оставляет диск $D^2(x)$ вполне геодезическим (и тогда эта вариация сводится к повороту диска вокруг его граничной окружности S_0^1 с помощью какого-то внутреннего автоморфизма объемлющей группы SU_{2m}), либо разрушает его локальную минимальность (по крайней мере, в одной внутренней точке).

Лемма 8. Имеет место включение: $i(U_m) \subset W$.

Доказательство. Поскольку каждое отображение $f \in i(U_m)$ имеет вид $f = Ad_x i_0$, $x \in G$, то достаточно проверить, что точка i_0 является точкой абсолютного минимума для функционала Дирихле D . Так как $SU_{2m} \subset S^{8m^2-1}$, и диск D_0^2 есть центральное плоское сечение сферы S^{8m^2-1} , то отображение i_0 является точкой абсолютного минимума для функционала площади A . Так как любой минимальный вектор является и гармоническим (в соответствующих локальных координатах), то это отображение i_0 является критической точкой и для функционала Дирихле D (отметим также, что обобщенная гармоничность отображения i_0 следует и из явной конструкции отображения i_0 ; см. выше). Так как всегда выполнено неравенство $A[f] \leq D[f]$, то ясно, что отображение i_0 является точкой абсолютного минимума для функционала Дирихле D . Лемма доказана.

Лемма 9. Имеет место равенство $i(U_m) = W$, где W есть множество точек абсолютного минимума функционала Дирихле D .

Доказательство. Пусть $f: D^2 \rightarrow SU_{2m}$, $f|_{S^1} = j_0$ есть точка абсолютного минимума функционала Дирихле D . В предыдущей лемме было доказано, что значение функционала D в точках абсолютного минимума равно $D[i_0]$, и что это значение равно $A[i_0]$. Так как $A[f] \leq D[f] = D[i_0] = A[i_0]$, то $A[f] \leq A[i_0]$, но поскольку это соотношение можно рассматривать в стандартной метрике сферы S^{8m^2-1} , то очевидно, что $A[f] = A[i_0]$, а тогда $fD^2 \subset S^{8m^2-1}$ является центральным плоским сечением; кроме того, отображение f гармонично. Продолжим вполне геодезический диск fD^2 до сферы S^2 , являющейся вполне геодезической сферой в сфере S^{8m^2-1} (и тем более — вполне геодезической в группе SU_{2m}). Мы получили в группе SU_{2m} две вполне геодезические сферы: S_0^2 и \tilde{S}^2 , причем $S_0^2 \cap \tilde{S}^2 \supseteq S_0^1 \supseteq E_{2m}$. Минимальными подгруппами, содержащими эти сферы S_0^2 и \tilde{S}^2 , являются подгруппы G_1 и G_2 , изоморфные группе SU_2 . Два вложения $\alpha_1: G_1 \rightarrow SU_{2m}$, $\alpha_2: G_2 \rightarrow SU_{2m}$ определяют два точных представления группы SU_2 в группу SU_{2m} . Так как ранг $(SU_2) = 1$, то можно считать, что окружность S_0^1 является образом максимального тора $T^1 = S^1 \subset SU_2$, причем $S_0^1 \subset T^{2m-1}$, где T^{2m-1} — максимальный тор в группе SU_{2m} . Так как два представления j_1

и j_2 совпадают на торе T^1 (T^1 является максимальной коммутативной подгруппой в группе SU_2 ; в данном случае этот тор одномерен и гомеоморфен окружности), то они эквивалентны, т. е. существует элемент $x \in SU_{2m}$ такой, что выполнено равенство: $j_1 = \text{Ad}_x \cdot j_2$. Две сферы S_0^2 и $xS_0^2x^{-1}$, вложенные в группу G_1 , можно совместить еще одним внутренним автоморфизмом Ad_{x_1} ; тогда в сфере S_0^2 мы получаем две геодезические: S_0^1 и $x_1 x S_0^1 x^{-1} x_1^{-1}$. Следовательно, существует элемент $x_2 \in G_1$ такой, что $S_0^1 \equiv x_2 x_1 x S_0^1 x^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1}$. Поэтому автоморфизм Ad_y , где $y = x_2 x_1 x$, переводит отображение f в отображение i_0 , оставляя на месте окружность S_0^1 , т. е. $f \in i(U_m)$. Лемма доказана.

Тем самым доказательство теоремы полностью закончено.

Отметим, что все точки множества W являются не просто минимальными точками для обоих функционалов A и D , но даже «вполне геодезическими» точками (т. е. вполне геодезическими отображениями). Это обстоятельство имело место и в одномерном случае, но там минимальность какой-либо траектории автоматически влечет за собой ее геодезичность; в двумерном же случае из минимальности двумерного диска D^2 вовсе не следует его полная геодезичность в объемлющей группе. Более того, единственными вполне геодезическими дисками D^2 с границей S_0^1 являются диски множества W ; иными словами, если отображение $f \in \Pi_2$ является критической точкой для функционала D и если, кроме того, диск fD^2 — вполне геодезический, то имеем: $f \in W$.

III. Ортогональная периодичность с точки зрения многомерных вариационных задач.

Теорема, аналогичная доказанной выше теореме унитарной периодичности, имеет место и для ортогональной группы (и называется, соответственно, теоремой ортогональной периодичности) Ботта.

Теорема 3. Имеет место изоморфизм $\pi_i(O) \cong \pi_{i+8}(O)$, где O — стабильная ортогональная группа: $O = \lim O_n$; $O_n \subset \subset O_{n+1}$ — стандартные вложения. Кроме того, стабильные гомотопические группы ортогональной группы имеют следующий вид:

$$\pi_0 = Z_2, \quad \pi_1 = Z_2, \quad \pi_2 = 0, \quad \pi_3 = Z, \quad \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = 0,$$

$$\pi_7 = Z, \quad \pi_8 = \pi_{16}.$$

Мы докажем только первую часть этого результата, причем сразу применим аппарат многомерных вариационных задач. Дело в том, что стандартное доказательство теоремы ортогональной периодичности, использующее одномерную теорию Морса, состоит из восьми шагов (по аналогии с тем, как из двух шагов состояло

стандартное доказательство унитарной периодичности), в то время как применение функционала Дирихле, определенного на пространстве отображений восьмимерных дисков (вместо двумерных дисков унитарной периодичности), позволит нам сразу, т. е. в один шаг, получить изоморфизм: $\pi_i(O) = \pi_{i+8}(O)$ (хотя и несколько нестрого).

Рассмотрим евклидово пространство \mathbb{R}^{p^2} вещественных матриц размера $p \times p$; евклидово скалярное произведение может быть записано в виде: $\varphi(A, B) = \text{Sp}(AB^T)$. Тогда группа SO_p изометрично вкладывается в стандартную сферу S^{p^2-1} радиуса \sqrt{p} (с центром в точке 0) как гладкое многообразие, на котором евклидова метрика $\varphi(A, B)$ индуцирует двусторонне инвариантную риманову метрику, совпадающую с формой Киллинга. Алгебра Ли so_p группы SO_p вложена в пространство \mathbb{R}^{p^2} как подпространство матриц X , $X^T = -X$, и пересечение $so_p \cap SO_p$ является компактным симметрическим пространством $SO_p/U_{(p,2)}$, если p четно. Обозначим пересечение $so_p \cap SO_p$ через $\Omega_1(p)$; тогда очевидно, что многообразие $\Omega_1(p)$ состоит в точности из тех элементов $g \in SO_p$, для которых выполнено равенство $g^2 = -E$, т. е. $\Omega_1(p)$ совпадает с множеством комплексных структур в \mathbb{R}^p . Положим теперь $p = 16r$; тогда в группе SO_{16r} существуют восемь антисимметрических «комплексных структур», т. е. операторов, которые мы обозначим через J_1, J_2, \dots, J_8 ; $J_s^2 = -E$, $J_s J_k + J_k J_s = 0$, $k \neq s$. Все векторы J_s ($1 \leq s \leq 8$) лежат в плоскости so_{16r} и, в силу условия антисимметричности, все они попарно ортогональны. Кроме того, каждый вектор J_s ортогонален вектору $E \in SO_{16r}$, поэтому сфера $S_0^8 = \{x \in SO_{16r} \mid x = a^0 E + a^1 J_1 + \dots + a^8 J_8; (a^0)^2 + \dots + (a^8)^2 = 1\}$ является плоским сечением сферы S^q (где $q = 256r^2 - 1$), проходящим через начало координат, и, следовательно, вполне геодезична в сфере S^q и в группе $SO_{16r} \subset S^q$. Ясно, что выполнено равенство $S_0^8 \cap so_{16r} = S_0^8 \cap \Omega_1(16r) = \overline{S_0^8}$, где $\overline{S_0^8}$ — вполне геодезический экватор, задаваемый уравнением $a^0 = 0$. Фиксируем в группе SO_{16r} вполне геодезическую сферу $S_0^7 = \{x = a^0 E + a^1 J_1 + \dots + a^7 J_7; (a^0)^2 + \dots + (a^7)^2 = 1\}$; сфера S_0^7 является границей вполне геодезического восьмимерного диска $D_0^8 \subset S_0^8$, $D_0^8 = \{x \in S_0^8; a^8 \geq 0\}$. Пусть D^8 — стандартный восьмимерный диск в евклидовой метрике, $S^7 = \partial D^8$, i'' — стандартное отображение D^8 на полусферу, тождественное на границе ∂D^8 , i' — единственное изометрическое вложение полусферы $i'D^8$ в группу SO_{16r} , совпадающее на сфере $i''S^7$ с фиксированным изометрическим вложением j_0 : $S^7 \rightarrow S_0^7$. Положим $i_0 = i' \circ i''$, $i_0: D^8 \rightarrow SO_{16r}$. Рассмотрим пространство Π_8 всех непрерывных отображений $f: D^8 \rightarrow SO_{16r}$ таких, что $f|_{S^7} = j_0$. Пусть $\Pi_8 \subset \Pi_8$ — подпространство, состоящее из всех отображений f класса $H_1^8(D^8)$ диска D^8 в группу SO_{16r} . На про-

пространстве Π_8 рассмотрим два функционала: $A[f]$ — функционал площади $A[f] = \int_{D^8} V \det \Omega \, dv$ и функционал Дирихле

$$D[f] = \int_{D^8} \left[\frac{1}{8} (x_\alpha^i, x_\beta^i) \right]^4 \, dv = \int_{D^8} \left[\frac{1}{8} \sum_{\alpha=1}^8 g_{ij}(x_\alpha^i, x_\alpha^j) \right]^4 \, dv.$$

Тогда $A[f] \ll D[f]$ при любом $f \in \Pi_8$.

Через β_s обозначим стандартный изоморфизм гомотопических групп $\pi_s(\Pi_8) \cong \pi_{s+8}(SO_{16r})$.

Теорема 4 (Фоменко). *Рассмотрим группу SO_{16r} и функциональные пространства Π_8 и Π_8 отображений восьмимерных дисков в ортогональную группу. В пространстве Π_8 рассмотрим подмножество W , состоящее из всех тех точек (отображений) f , на которых функционал Дирихле $D[f]$ достигает абсолютного минимума. Тогда имеем:*

- а) множество W гомеоморфно ортогональной группе O_r ;
- б) вложение $i: W \rightarrow \Pi_8 \rightarrow \Pi_8$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп $i_*: \pi_s(O_r) \rightarrow \pi_s(\Pi_8)$ при $s < r - 2$; поэтому $(r - 2)$ -мерный остов пространства Π_8 гомотопически эквивалентен $(r - 2)$ -мерному остову группы O_r и композиция $\beta_s \circ i_*: \pi_s(O_r) \xrightarrow{\cong} \pi_{s+8}(SO_{16r})$ является изоморфизмом ортогональной периодичности при $s \leq r - 2$.

Доказательство теоремы. Так как группа $\pi_2(U_{2n})$ тривиальна, то пространство Π_2 связно. Так как $\pi_8(SO_{16r}) = \mathbb{Z}_2$, то пространство Π_8 несвязно и состоит из двух связных компонент; как будет видно ниже из доказательства, множество W также состоит из двух связных компонент, причем каждая компонента пространства Π_8 содержит ровно по одной компоненте множества W и стягивается (при $r \rightarrow \infty$) именно на эту компоненту связности.

Рассмотрим теперь в группе SO_{16r} подмножество Ω_8 , состоящее из всех комплексных структур J , которые антикоммутируют со структурами J_1, J_2, \dots, J_7 (см. их описание выше), т. е. антикоммутируют, тем самым, с каждой точкой шестимерной стандартной сферы $S_6^6 \subset S_0^7$, задаваемой уравнением $a^0 = 0$. Так, например, ясно, что $J_8 \in \Omega_8$. Прямое алгебраическое вычисление показывает, что пространство Ω_8 состоит из двух компонент связности и, кроме того, гомеоморфно группе O_r . Далее, пространство Ω_8 содержится целиком в плоскости, ортогональной ко всем векторам E, J_1, \dots, J_7 . Ясно, что $S_0^8 \cap \Omega_8 = \{J_8, -J_8\}$, а потому пересечение $D_0^8 \cap \Omega_8 = J_8$ есть одна точка.

Поставим в соответствие каждой точке $x \in \Omega_8$ вполне геодезическую сферу $S^8(x)$, имеющую своим экватором стандартную сферу S_0^7 . Если $x \in \Omega_8$, то вектор x ортогонален векторам E, J_1, \dots, J_7 ,

($xJ_s = -J_s x$, $1 \leq s \leq 7$, а вектор E ортогонален всем комплексным структурам). Поэтому сфера, натянутая на базисные векторы $\{E, J_1, \dots, J_7, x\}$, является центральным плоским сечением в сфере S^8 и вполне геодезична в группе SO_{16r} . В сфере $S^8(x)$ рассмотрим диск

$$D^8(x) = \{y \in S^8(x); \quad y = y^0 E + \dots + y^7 J_7 + y^8 x; \quad y^8 \geq 0\}.$$

Тогда каждому вектору $x \in \Omega_8$ однозначно соответствует вполне геодезический диск $D^8(x)$ такой, что $\partial D^8(x) = S_0^7$, и если $x_1 \neq x_2$, то $D^8(x_1) \cap D^8(x_2) = S_0^7$. Точно так же, как и в случае унитарной периодичности, можно определить вложение $i: O_r \xrightarrow{\cong} \Omega_8 \rightarrow \Pi_8 \rightarrow \Pi_8$, так как для каждого диска $D^8(x)$, $x \in \Omega_8$, существует единственная изометрия $\omega(x)$: $i^*: D^8 \rightarrow D^8(x)$, $\omega(x) \circ i^*|_{S^8} = f$; тогда $i(x) = \omega(x) \circ i^*$.

Лемма 10. *Вложение $i: O_r \rightarrow \Pi_8$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп до размерности $r - 2$.*

Доказательство. Пусть отображение $f: S^s \rightarrow O_r$ представляет элемент гомотопической группы: $[f] \in \pi_s(O_r)$; тогда в группе SO_{16r} мы получаем множество $\{D^s(x)\}$, $x \in f(S^s)$; $\Pi_8 \ni i(x)$. Так как сфера S_0^7 фиксирована, то в группе SO_{16r} возникает подмножество $\bar{S} = \bigcup_{x \in f(S^s)} D^s(x)$, которое определяет отображение $F: S^{s+8} \rightarrow SO_{16r}$ такое, что $F|_{S^s} = f$ (сфера S^s — экватор в сфере S^{s+8}). Теперь рассмотрим последовательность нульмерных сфер $S_k^0 = \{J_k, -J_k\}$, $1 \leq k \leq 7$. Фиксируя сферу S_7^0 , мы можем построить соответствие $\gamma_7: x \rightarrow D^1(x)$, где точка $x \in \Omega_8$, траектория $D^1(x)$ есть минимальная геодезическая из точки J_7 в точку $-J_7$, середина которой есть точка x . Тогда $D^1(x) \in \Omega_7$, и существует отображение $F_7: S^{s+1} \rightarrow \Omega_7$, такое, что имеет место соотношение:

$$F_7 S^{s+1} = \bigcup_{x \in f(S^s)} D^1(x), \quad F_7|_{S^s} = f,$$

причем из одномерной теории Морса следует, что соответствие $f \mapsto F_7$ определяет изоморфизм гомотопических групп $\pi_s(\Omega_8) \xrightarrow{\cong} \pi_{s+1}(\Omega_7)$. Фиксируя нульмерную сферу S_6^0 , получаем соответствие: $\gamma_6: y \rightarrow D^1(y)$, $y \in \Omega_7$; ясно, что существует отображение

$$F_6: S^{s+2} \rightarrow \Omega_6; \quad F_6 S^{s+2} = \bigcup_{y \in F_7(S^{s+1})} D^1(y); \quad F_6|_{S^{s+1}} = F_7.$$

Продолжая этот процесс, мы получаем соответствия: $\gamma_7, \gamma_6, \dots, \gamma_1, \gamma_0$, где $E = J_0$; отображение $F_0: S^{s+8} \rightarrow \Omega_0 = SO_{16r}$, причем отображение F_0 соответствует отображению f при изоморфизме

периодичности; $F_0 S^{s+8} = FS^{s+8}$, так как $\bigcup_{x \in f(s)} [\gamma_0 \circ \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_r(x)] = \bar{S}$. Поэтому можно считать, что $F_0 \equiv F$. Это завершает доказательство леммы, поскольку $\pi_s(\Pi_8) \cong \pi_{s+8}(SO_{16r})$.

Тем самым для подпространства $i(O_r) \subset \Pi_8$ выполнены все утверждения пункта б) доказываемой нами теоремы. Осталось доказать, что выполнено равенство $W = i(O_r)$.

Лемма 11. *Имеет место соотношение: $i(O_r) \subset W$.*

Доказательство. Поскольку диск $i(x)(D^8)$ является центральным плоским сечением, то утверждение настоящей леммы доказывается точно так же, как соответствующее утверждение в теореме об унитарной периодичности, т. е. следует из неравенства $A[f] < D[f]$.

Лемма 12. *Верно соотношение: $i(O_r) = W$.*

Доказательство. Пусть $f \in W$, т. е. функционал D принимает на отображении f свое наименьшее значение. Пусть $i_0: D^8 \rightarrow D_0^8$ (см. выше); тогда очевидно, что $A[i_0] = D[i_0]$. Так как $A[f] < D[f] = D[i_0] = A[i_0]$, то точно так же, как и при доказательстве соответствующей леммы унитарной периодичности, устанавливается, что диск $f(D^8)$ является центральным плоским сечением, содержащим сферу S_0^7 в качестве своей граници. Пусть $x \in f(D^8)$ и пусть вектор x ортогонален всем векторам E, J_1, \dots, J_7 ; тогда имеем: $x = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, где γ есть геодезическая на диске $f(D^8)$, $\gamma(0) = E$, $\gamma(1) = -E$. Длина $L(\gamma)$ равна $L(\gamma')$, где геодезическая γ' содержится в диске $f(D^8)$ и такова, что $\gamma'(0) = E$, $\gamma'(1) = -E$, $\gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = J_1$. Поэтому γ — минимальная геодезическая из точки E в точку $-E$ в группе SO_{16r} . Отсюда имеем: $x = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \in \Omega_1$, т. е. $x^2 = -E$. Так как вектор x ортогонален всем векторам J_s ($1 \leq s \leq 7$), то $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + J_s) \in \Omega_1$, т. е. $\frac{1}{2}(x + J_s)^2 = -E$. Следовательно, $xJ_s + J_s x = 0$, т. е. $x \in \Omega_8$. Поэтому $f \in i(O_r)$, так как $f(D^8) = D^8(x)$. Лемма доказана. Тем самым доказательство ортогональной периодичности завершено, хотя и нестрого, без отсылки к «одномерной» теории Морса.

Ясно, что совершенно аналогичная теорема имеет место и в случае симплектической группы Sp_n . Мы опускаем формулировки и доказательство, предоставляя их читателю в качестве полезного упражнения на технику многомерных вариационных задач.

Задача 1. Выведите следующие гомотопические эквивалентности: а) $BSp = \Omega\Omega\Omega SO$; б) $BO = \Omega\Omega\Omega Sp$ тем же методом. Извлеките из этих равенств первые восемь гомотопических групп: $Z_2, Z_2, 0, Z, 0, 0, 0, Z$.

В случае унитарной периодичности мы имели следующее полезное утверждение: множество $i(U_m) \subset \Pi_2$ является орбитой точки $i_0 \in \Pi_2$ при присоединенном действии группы $G \subset U_{2m}$, где $G \cong U_m$, на множестве отображений Π_2 . В случае ортогональной периодичности аналогичное утверждение справедливо для $i(O_r)$, хотя этот факт мы и не использовали при доказательстве теоремы.

Утверждение 1. *Множество $W = i(O_r)$, вложенное в пространство Π_8 , является орбитой точки $i_0 \subset \Pi_8$ при присоединенном действии группы $G \subset SO_{16r}$ на множестве всех отображений Π_8 , где $G = J_8\Omega_8 \cong O_r$.*

Доказательство. Достаточно установить, что для любого вполне геодезического диска $D^8(x)$, где $x \in \Omega_8$, существует элемент $g \in SO_{16r}$ такой, что выполнены равенства: $gJ_s = J_sg$ ($1 \leq s \leq 7$) и $gxg^{-1} = J_8$. Рассмотрим $g \in SO_{16r}$, $gJ_s = J_sg$ ($1 \leq s \leq 7$); тогда $g\Omega_8g^{-1} \subset \Omega_8$ и $(gD^8g^{-1}) \cap \Omega_8 = gJ_8g^{-1}$, т. е. $gD^8(x)g^{-1} = D^8(gxg^{-1})$. Пусть R есть подгруппа всех элементов $g \in SO_{16r}$ таких, что $gJ_s = J_sg$ ($1 \leq s \leq 7$), и пусть $p(g) = gJ_8g^{-1}$ — естественная проекция $p: R \rightarrow \Omega_8$. Рассмотрим в группе SO_{16r} сдвиг $g \rightarrow J_8g$. Пусть $g \in R$, $g = \exp A$, $A \in T_E R$. Так как $gJ_s = J_sg$, то $AJ_s = J_sA$. Тогда легко видеть, что J_8g антисимметрический с J_s ($1 \leq s \leq 7$), т. е. $J_8g \in \Omega_8$, $J_8R \subset \Omega_8$. Обратно, пусть $J_8 \exp A \in \Omega_8$; тогда $AJ_s = J_sA$ ($1 \leq s \leq 7$), или $gJ_s = J_sg$, где $g = \exp A$ (т. е. $g \in R$, $J_8R \subset \Omega_8$). Отсюда получаем: $\Omega_8 = J_8R$. Поэтому проекция p является диффеоморфизмом и для любого $x \in \Omega_8$ существует элемент $g \in R$ такой, что $x = gJ_8g^{-1}$. Предложение доказано.

Выход. Из теорем, доказанных выше, следует, что механизм возникновения как унитарной, так и ортогональной периодичности — один и тот же, а окончательный результат зависит только от того, на каком пространстве мы рассматриваем многомерный функционал Дирихле; в случае пространства отображений двумерных дисков мы получаем унитарную периодичность, а в случае пространства отображений восьмимерных дисков — ортогональную.

Было бы интересно получить прямое доказательство этих двух теорем, не использующее никакой информации, связанной с одномерными функционалами действия и длины. Прямое доказательство немедленно следовало бы из факта стягиваемости $(2m)$ -мерного остова пространства Π_2 (соответственно, $(r-2)$ -мерного остова пространства Π_8) на подпространство $i(U_m)$ (соответственно, $i(O_r)$), являющееся множеством точек абсолютного минимума функционала Дирихле. Именно соответствующая теорема стягиваемости для одномерного функционала действия (см. классическую теорию Морса на пространстве петель) и позволяет осуществить переход: $\pi_{t-1}(G_{2m,m}^\circ) \cong \pi_{t-1}(\Pi_1)$. Аналогичное утверждение для многомерных вариационных задач пока

отсутствует. Это связано с типичными трудностями, возникающими при изучении многомерных задач «типа Плато», когда многомерный функционал может вырождаться на некоторых подмножествах положительной меры, содержащихся в экстремальных подмногообразиях.

§ 26. Теория Морса и некоторые движения в плоской задаче n тел

В этом параграфе мы рассмотрим с точки зрения теории Морса некоторые движения плоской задачи n тел. Как известно, в первом приближении можно считать, что реальные планеты солнечной системы движутся в одной плоскости, называемой плоскостью эклиптики. Центр масс всей этой системы можно с большой степенью точности считать совмещенным с положением Солнца. Движение системы управляет ньютонаским потенциалом согласно законам классической механики. Как обычно, движение системы определяется начальными данными: надо задать положения гравитирующих масс и их скорости в начальный момент времени. Хорошо известно, что общие решения этой системы весьма сложны (например, согласно классической теореме Брунса—Пуанкаре система не допускает лишних аналитических интегралов движения).

Однако, несмотря на сложность общей задачи, можно выделить некоторые естественные подклассы в множестве всех решений, которые допускают достаточно простое описание. Одним из таких подклассов являются так называемые «твердолевые решения», т. е. такие частные решения, при которых движение всей системы тел изображается как одновременный поворот всех масс системы на один и тот же угол в плоскости эклиптики. Другими словами, вся система, как твердое тело поворачивается вокруг своего центра масс; в этом частном случае взаимные положения всех тел системы не меняются, не зависят от времени. Такие периодические решения системы иногда называют в литературе «круговыми траекториями». Замечательным фактом оказывается то обстоятельство, что описание таких «твердолевых решений» задачи n тел сводится к описанию критических точек некоторой функции Морса, причем топологическая информация, естественно связанныя с функциями Морса на гладких многообразиях (см. выше), позволяет сделать важные качественные высказывания о геометрической структуре этих круговых решений. Например, весьма интересен вопрос: какова конфигурация, образованная в двумерной плоскости n телами системы, движущимися в соответствии с «твердолевым решением» системы. Ясно, что далеко не каждая конфигурация из n точек на плоскости способна породить круговые траектории системы. Как оказывается, такие особые конфигурации определяются набором масс тел системы, и

в том случае, когда все массы, кроме одной, равны, задаются некоторыми дискретными группами симметрий.

Такие конфигурации иногда называются относительными равновесиями системы.

Перейдем теперь к точной постановке задачи. Плоская задача n тел небесной механики полностью определяется набором n вещественных положительных чисел m_1, m_2, \dots, m_n . Будем считать, что все n тел изображаются n точками двумерной евклидовой плоскости. Пусть начало координат — точка 0 — совмещена с центром масс системы n тел. Положение каждой j -й точки на плоскости зададим одной комплексной координатой $z_j = x_j + iy_j$; поскольку 0 — центр масс системы, то имеем соотношение: $\sum_{j=1}^n m_j z_j = 0$. Следовательно, конфигурационным пространством системы является линейное подпространство M^{2n-2} (комплексная гиперплоскость) в евклидовом пространстве $C^n = R^{2n}$:

$$M^{2n-2} = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in C^n \mid \sum_{j=1}^n m_j z_j = 0 \right\}.$$

Фазовым пространством системы является касательное расслоение $TM = M \times M$ (прямое произведение).

Кинетическая энергия системы K задается по формуле

$$K(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |v_i|^2,$$

где v — вектор скорости, $\sum_{i=1}^n m_i v_i = 0$, $|v_i|$ — евклидова длина вектора в плоскости R^2 , $R^{2n} = R^2 \times \dots \times R^2$ (n раз).

В конфигурационном пространстве системы мы рассмотрим особое подмножество, состоящее из набора «биссекторных» гиперплоскостей, а именно:

$$\Delta_{ij} = \{(z_1, \dots, z_n) \in C^n \mid z_i = z_j\}; \quad \Delta = \bigcup_{i,j} \Delta_{ij}.$$

Потенциальная энергия системы задается как функция на конфигурационном пространстве, $M \setminus \Delta$, где

$$V(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|}.$$

Классические уравнения Ньютона задают, тем самым, векторное поле X на кокасательном расслоении $T = T(M \setminus \Delta)$. Конфигурационное пространство системы — $(M \setminus \Delta)$, а фазовое — $T^*(M \setminus \Delta)$.

Полная энергия $E: T \rightarrow \mathbb{R}^1$ задается по формуле: $E = K + V$. В координатах (z, v) имеем: $E(z, v) = K(v) + V(z)$; функция $E(z, v)$, определенная на $T^*(M \setminus \Delta)$, является первым интегралом потока X , т. е. функция $E(z, v)$ постоянна на каждой интегральной траектории $(z(t), v(t))$ системы X . Наряду с этим интегралом системы X допускает и еще один интеграл (функционально не зависящий от интеграла E в точках общего положения на $T(M \setminus \Delta)$) — момент импульса, обозначаемый через J и задаваемый по формуле:

$$J(z, v) = \sum_{i=1}^n m_i [z_i \wedge v_i],$$

где через $[z_i \wedge v_i]$ обозначено векторное произведение (или внешнее произведение двух 1-форм):

$$z_i^1 v_i^2 - z_i^2 v_i^1, \text{ где } z_i = (z_i^1, z_i^2); \quad v_i = (v_i^1, v_i^2)$$

— декартовы координаты векторов z_i и v_i в плоскости \mathbb{R}^2 .

Рассмотрим на \mathbb{R}^3 стандартное действие группы $G = S^1$ (вращения вокруг центра масс); тогда это действие порождает очевидное покоординатное действие на $M \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$ (n раз) и на касательном расслоении TM . При этом группа G сохраняет (переводит в себя) «биссекторные» плоскости $\Delta_{ij} = \{z_i = z_j\}$; следовательно, группа G оставляет инвариантными $M \setminus \Delta$, $T(M \setminus \Delta)$, K , J , V , E , X . Таким образом, поток X естественно определяет динамическую систему на факторпространстве: $T(M \setminus \Delta)/G = T((M \setminus \Delta)/G)$. Так как можно еще дополнительно профакторизовать по действию группы растяжений $z \mapsto \lambda z$ в \mathbb{C}^n , то, окончательно, мы можем редуцировать систему к системе на $T(\mathbb{C}P^{n-1} \setminus \bar{\Delta})$, где $\bar{\Delta}$ — фактор Δ по двум указанным выше действиям групп: вращений и растяжений. Этой факторизацией мы воспользуемся позже, а сейчас вернемся к исходной системе на $T(M \setminus \Delta)$.

Наличие двух интегралов E и J позволяет определить отображение $I: T \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ по формуле: $I(\xi) = (E(\xi), J(\xi)) \in \mathbb{R}^2$, где $\xi = (z, v) \in T(M \setminus \Delta) = T$. Отображение $I: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ является гладким; рассмотрим расслоение многообразия T на прообразы $I_{c,p} = I^{-1}(c, p)$, где $(c, p) \in \mathbb{R}^2$; $E(\xi) = c$, $J(\xi) = p$. Прообразы $I_{c,p}$ являются (для почти всех точек $(c, p) \in \mathbb{R}^2$) гладкими подмногообразиями коразмерности 2 в многообразии $T = T(M \setminus \Delta)$. Из определения I ясно, что все поверхности $I_{c,p}$ являются совместными поверхностями уровня двух интегралов: E и J и имеют (в точках общего положения) размерность $4n - 4 - 2 = 4n - 6$, так как $\dim T = 4n - 4$.

Лемма 1. Многообразия $I_{c,p}$ инвариантны относительно действия группы $G = S^1$ и относительно потока X .

Доказательство сразу следует из описания действия S^1 на $\mathbb{C}^n \setminus \Delta$ и на $T(\mathbb{C}^n \setminus \Delta)$.

Так как $I_{c,p}$ (т. е. поверхность постоянной энергии $E = c$ и постоянного момента импульса $J = p$) инвариантна при действии S^1 , то корректно определено факторпространство $\tilde{I}_{c,p} = I_{c,p}/S^1$.

Одна из задач, решаемых в рамках классической небесной механики, заключается в том, чтобы дать описание топологической структуры поверхностей $I_{c,p}$ и $\tilde{I}_{c,p}$. Теперь рассмотрим круговые траектории в задаче n тел.

Пусть фиксированы массы m_1, \dots, m_n ; тогда конфигурация $z = (z_1, \dots, z_n)$ (задаваемая положением точек z_1, \dots, z_n , где $\sum m_i z_i = 0$) называется относительным равновесием (совокупность таких конфигураций обозначается через R_e), если стандартное действие S^1 на \mathbb{R}^3 (и, следовательно, на \mathbb{C}^n) индуцирует движение $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$, удовлетворяющее уравнениям движения Ньютона. Другими словами, каждая точка z_i описывает окружность $z_i(t)$, причем взаимные расположения точек z_1, \dots, z_n сохраняются.

Множество $R_e \subset M \setminus \Delta$, очевидно, инвариантно относительно действия S^1 и умножения на скаляр (т. е. относительно преобразования $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \neq 0$), поэтому корректно определено множество Φ_n классов эквивалентности в R_e (две конфигурации z и z' считаются эквивалентными, если их можно совместить путем ортогонального поворота и умножения на скаляр).

Оказывается, при малых n множество Φ_n может быть эффективно описано (см. об этом ниже).

Перейдем теперь к описанию относительных равновесий через критические точки функции V (потенциала).

Рассмотрим в $M \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, задаваемое симметричной формой $K(\xi, \eta) = \sum m_i \xi^i \eta^i$ (K — кинетическая энергия системы); обозначим через $S_K = S_K^{2n-1}$ единичную сферу в M относительно этого скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $S_K = \{z \in M \mid K(z, z) = 1\}$. При этом мы пользуемся тем, что M изометрично каждому касательному пространству (мы используем то, что $M \setminus \Delta$ — 2 n -мерная область в линейном пространстве \mathbb{R}^{2n}). Через $S_K \setminus \Delta$ обозначим дополнение в S_K к биссекторным плоскостям Δ , т. е. $S_K \setminus \Delta = S_K \setminus (S_K \cap \Delta)$. Отметим, что в терминах многообразий $S_K \setminus \Delta$ можно описывать поверхности уровня $I_{c,p}$. В самом деле, рассмотрим для примера частный случай: движение системы по поверхности уровня $I_{c,0}$, отвечающей нулевому значению момента количества движения. Если $J(z, v) = 0$, то имеем: $\sum m_i [z_i \wedge v_i] = \sum m_i (z_i^1 v_i^2 - z_i^2 v_i^1) = 0$. Отсюда вытекает следующее геометрическое утверждение.

Предложение 1 (Смейл). В плоской задаче n тел с массами m_1, \dots, m_n движение динамической системы с нулевым моментом импульса происходит по поверхности уровня двух

первых интегралов $E = c = \text{const}$, $J = p = 0$, т. е. по интегральной поверхности $I_{c,0}$, где поверхность $I_{c,0}$ имеет следующую топологическую структуру:

а) если энергия $E = c$ неотрицательна, то $I_{c,0}$ диффеоморфно прямому произведению $S^{2n-4} \times (S_K \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^1$; размерность $I_{c,0}$ равна $(2n - 4) + (2n - 2 - 1) + 1 = 4n - 6$;

б) если энергия $E = c$ отрицательна, то поверхность $I_{c,0}$ диффеоморфна прямому произведению $\mathbb{S}^{2n-3} \times (S_K \setminus \Delta)$; размерность $I_{c,0}$ равна $(2n - 3) + (2n - 2 - 1) = 4n - 6$.

Поверхности $I_{c,p}$, отвечающие постоянным значениям энергии и момента (уже при произвольных значениях c и p), также могут быть довольно просто описаны в терминах некоторых римановых расслоений над пространством $S_K \setminus \Delta$. Поскольку топологическая структура $I_{c,p}$ не будет использоваться в дальнейших конструкциях, то это описание мы опускаем.

Теперь сформулируем основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 1 (Смейл). Пусть задан произвольный набор масс m_1, \dots, m_n , определяющий плоскую задачу n тел. Рассмотрим многообразие S_K : $\{K(z) = 1\}$; $\dim S_K = 2n - 3$, и рассмотрим на многообразии $S_K \setminus \Delta$ гладкую функцию V_S , являющуюся ограничением на $S_K \setminus \Delta \subset M \setminus \Delta$ потенциала V , заданного на $M \setminus \Delta$; пусть точка $z \in M \setminus \Delta$ такова, что $K(z) = 1$, т. е. можно считать, что $z \in S_K \setminus \Delta$. Тогда точка (конфигурация n тел) z является относительным равновесием тогда и только тогда, когда z является критической точкой для функции V_S на $S_K \setminus \Delta$. Так как относительные равновесия z и $z' = \lambda z$ мы считаем эквивалентными, то в каждом классе из Φ_n обязательно имеется точка z такая, что $K(z) = 1$, поэтому критические точки функции V_S на многообразии $S_K \setminus \Delta$ описывают все Φ_n , т. е. классы эквивалентных относительных равновесий.

Доказательство этой теоремы будет дано ниже. Сейчас мы (без доказательства) предъявим некоторые результаты классификационного характера о классах эквивалентных относительных равновесий.

В случае задачи двух тел ($n = 2$) имеется только один класс эквивалентных относительных равновесий. Для трех тел ($n = 3$) имеется пять классов эквивалентных относительных равновесий. Два класса отличаются друг от друга ориентацией и геометрически изображаются вершинами равностороннего треугольника (так называемый случай Лагранжа). Три других класса образованы так называемыми коллинеарными относительными равновесиями (случай Эйлера). Это означает, что все три точки z_1, z_2, z_3 расположены на одной прямой, и имеется три различных способа расположения точек z_1, z_2, z_3 на прямой, удовлетворяющих уравнениям движения Ньютона.

Нерешенный вопрос: для любого ли набора масс m_1, \dots, m_n множество Φ_n (т. е. множество различных классов эквивалентных

относительных равновесий) конечно? Во всех известных примерах (до конца исследований) множество Φ_n конечно.

Перейдем к доказательству основной теоремы. Она является следствием одного общего результата из теории гамильтоновых систем.

Пусть M — гладкое многообразие — конфигурационное пространство некоторой механической системы, $T = TM$ — фазовое пространство системы; кинетическую энергию K можно интерпретировать как риманову метрику на многообразии M , т. е. форму K , можно понимать как скалярное произведение в касательном пространстве $T_z M$. Полную энергию E запишем в виде $E = K + V$. Считая все определенные выше величины заданными, мы можем с помощью уравнений Гамильтона (или Лагранжа) определить обыкновенные дифференциальные уравнения на касательном (или кокасательном) расслоении, т. е. гладкое векторное поле на $T = TV$. Эти же уравнения можно интерпретировать как дифференциальные уравнения второго порядка на многообразии M (см. [1], ч. I, гл. 5).

Предположим теперь, что эта лагранжева система обладает некоторой конфигурационной группой симметрий. Это означает, что на многообразии M гладко действует некоторая группа Ли G , сохраняющая риманову метрику K и потенциальную энергию V (заданную «почти всюду» на многообразии M). Другими словами, G — подгруппа группы изометрий римановой метрики K ; описанные выше условия означают, что группа G сохраняет и соответствующую гамильтонову систему (порожденную K, V). В частности, потенциал V постоянен на орбитах группы G .

Утверждение 1. Пусть M, K, V, G — механическая система с группой симметрий G , M — конфигурационное пространство, K — кинетическая энергия (она же — риманова метрика), V — потенциал на $M \setminus \Delta$, где $\text{vol}(\Delta) = 0$; K и V инвариантны относительно G . Пусть $X \in g$, где g — алгебра Ли группы G . Элемент X можно интерпретировать как гладкое векторное поле X на многообразии M ; через φ_t обозначим интегральные траектории потока X , т. е. решения системы $\dot{z} = X(z)$. Через φ_t обозначим интегральные траектории исходной механической системы, т. е. решения на многообразии M уравнения второго порядка, определяемого полной энергией $E = K + V$. Тогда решение $\varphi_t(z)$ совпадает с решением $\varphi_t(z)$ (т. е. для всех t : $\varphi_t(z) = \varphi_t(z)$) тогда и только тогда, когда начальная точка z является критической точкой функции f на многообразии M , которая задается формулой $f(z) = V(z) - K(X(z))$. При $V \equiv 0$ мы получаем описание тех геодезических (метрики K), которые совпадают с орбитами действия некоторой однопараметрической подгруппы группы изометрий.

Доказательство этого факта элементарно следует из того, что наше условие — это просто условие касания гамильтонова потока

на $T(M)$ с потоком X , поднятым в $T(M)$. Продемонстрируем теперь, как отсюда следует основная теорема этого параграфа.

Наряду с функцией V на M рассмотрим новую функцию V_p , определенную на множестве $M \setminus \Delta$ и задаваемую формулой $V_p(z) = V(z) + p^2/4K(z)$, где p — момент импульса.

Мы ввели выше пространство $S_K = \{K(z) = 1\}$; из определения M следует, что $M \setminus 0$ диффеоморфно $\mathbb{R}^+ \times S_K$, где через \mathbb{R}^+ обозначена положительная вещественная полуось; искомый диффеоморфизм $f: M \setminus 0 \rightarrow S_K \times \mathbb{R}^+$ задается формулой:

$$f(z) = (\sqrt{K(z)}; z/\sqrt{K(z)}); \quad \sqrt{K(z)} \in \mathbb{R}^+, z/\sqrt{K(z)} \in S_K.$$

Ясно, что ограничение отображения f на пространство $M \setminus \Delta$ переводит $M \setminus \Delta$ диффеоморфно в $\mathbb{R}^+ \times (S_K \setminus \Delta)$. Рассмотрим функцию V_S на $S_K \setminus \Delta$ как ограничение потенциала V на подмногообразие $S_K \setminus \Delta \subset M \setminus \Delta$; пусть $\sigma(d)$ — обозначение множества критических точек отображения d .

Докажем следующие два соотношения:

$$A. \sigma(V_p) = \{(t, x) \in (M \setminus \Delta) \approx \mathbb{R}^+ \times (S_K \setminus \Delta) \mid x \in \sigma(V_S)\},$$

$$t = -p^2/2V(x)$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in S_K \setminus \Delta$, $z = (t, x)$,

$$B. \sigma(V - K(X)) = \{z = (t, x) \in (M \setminus \Delta) \approx \mathbb{R}^+ \times (S_K \setminus \Delta) \mid x \in \sigma(V_S)\},$$

$$t = \sqrt[3]{-V(x)/2K(X)}.$$

Отметим, что выполняются следующие очевидные равенства: $K(z) = t^2$ (см. представление точки z в виде (t, x)), $V(z) = V(t, x) = V(x)/t$ (см. явную формулу для потенциала $V(z)$ в плоской задаче n тел). Докажем соотношение А.

Точка $z = (t, x)$ является критической для функции V_p тогда и только тогда, когда равны нулю частные производные: $\partial_t V_p = 0$, $\partial_x V_p = 0$ (где $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$). Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \partial_t V_p(t, x) &= \partial_t \left(V(z) + \frac{p^2}{4K(z)} \right) = \partial_t \left(\frac{V(x)}{t} + \frac{p^2}{4t^2} \right) = \\ &= -\frac{V(x)}{t^2} - \frac{p^2}{2t^3} = 0, \end{aligned}$$

т. е. имеем: $t = -p^2/2V(x)$. Далее, вычисляя $\partial_x V_p(t, x)$, получаем:

$$\partial_x V_p(z) = \frac{1}{t} (\partial_x V(x)) + \partial_x \left(\frac{p^2}{4t^2} \right) = \frac{1}{t} \partial_x V(x).$$

Итак, $\text{grad } V_p(t, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\partial_x V(x) = 0$ и $t = -p^2/2V(x)$, что и доказывает равенство А.

Докажем соотношение В. Ясно, что

$$(V - K(X))(z) = V(t, x) - K(X(t, x));$$

отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \partial_t [V(t, x) - K(X(t, x))] &= \partial_t \left[\frac{V(x)}{t} - t^2 K(X(t, x)) \right] = \\ &= -\frac{V(x)}{t^2} - 2t K(X(x)) = 0, \text{ где } X(x) \equiv X(1, x). \end{aligned}$$

Поскольку $t \in \mathbb{R}^+$, т. е. $t > 0$, то отсюда следует:

$$t^3 = -\frac{V(x)}{2K(X(x))}.$$

Подсчитывая далее $\partial_x (V - K(X))(t, x)$, получаем:

$$\partial_x \left[\frac{V(x)}{t} - t^2 K(X(x)) \right] = \frac{1}{t} \partial_x V(x) - t^2 \partial_x [K(X(x))] = 0.$$

Так как векторное поле X порождено элементом X алгебры Ли группы изометрий, то поле X сохраняет (с точностью до скалярного множителя) риманову метрику K . Отсюда следует $\partial_x [K(X(x))] = 0$. Итак, окончательно, $\partial_x V(x) = 0$.

Условие: $\text{grad}(V - K(X))(t, x) = 0$ выполняется в том и только в том случае, когда $t^3 = -V(x)/2K(X(x))$; $\partial_x (V(x)) = 0$. Последнее условие означает, что $\text{grad}_{x_1} V(x) = 0$, где $V(x) = V_S(x)$ — ограничение потенциала V с многообразия $M \setminus \Delta$ на подмногообразие $S_K \setminus \Delta$.

Итак, оба равенства А и В доказаны.

Доказательство теоремы 1. Пусть $z = (t, x)$ и $K(z) = 1$. Тогда точка z является, в силу утверждения 1, точкой, через которую проходит орбита некоторой однопараметрической подгруппы группы изометрий, совпадающая с некоторой интегральной траекторией динамической системы, в том и только в том случае, когда точка z — критическая для функции $V(z) = K(X(z))$. В силу равенства В множество критических точек функции $V - K(X)$ (где $K(z) = 1$) совпадает с множеством критических точек функции V_S на $S_K \setminus \Delta$. Но критические точки, описанные в утверждении 1 порождают проходящие через них орбиты (окружности) однопараметрических групп изометрий. В случае плоской задачи n тел эти орбиты, являясь интегральными траекториями динамической системы, задают множество положений относительного равновесия системы. Собирая, наконец, вместе всю полученную информацию, мы видим, что точка $z \in M \setminus \Delta$, $K(z) = 1$, является относительным равновесием в том и только в том случае, когда она есть критическая точка ограничения V_S на $S_K \setminus \Delta$ потенциала V . Теорема 1 доказана полностью.

Теперь мы можем перейти к изучению специального класса относительных равновесий — так называемым коллинеарным относительным равновесиям, т. е. таким, когда все n тел расположены в плоскости на одной прямой. Мы вычислим точное число таких

специальных положений равновесия для произвольного n , используя полученную выше информацию о критических точках потенциальной энергии.

Теорема 2 (Мультон). Для любого заданного набора масс m_1, \dots, m_n в плоской задаче n тел всегда существуют в точности $n!/2$ классов коллинеарных относительных равновесий системы, т. е. существуют $n!/2$ классов относительного равновесия, когда все точки z_i (задающие положения тел системы) расположены на одной прямой, проходящей через центр масс, и в процессе движения эта прямая вращается вокруг центра масс (начала координат); при этом каждая точка описывает круговую траекторию (окружность с центром в начале координат).

Пусть в плоскости системы \mathbb{R}^2 выбрана некоторая прямая l . Она однозначно определяет подмножество $M_l \subset M$ тех точек $z = (z_1, \dots, z_n)$, для которых все координаты z_i принадлежат прямой l . Как и раньше, выделим подмножество Δ биссекторных плоскостей и построим следующие подмножества: $S_l = S_K \cap M_l$, $S_l \setminus \Delta = S_l \setminus (S_l \cap \Delta)$. Рассмотрим действие окружности S^1 на множестве S_l ; ясно, что множество S_l остается на месте только при повороте плоскости на угол π . Следовательно, на множестве S_l естественно действует группа второго порядка Z_2 . Рассмотрим факторпространство S_l/Z_2 , где l — фиксированная ранее прямая в двумерной плоскости. Так как фиксация такой прямой однозначно определяет в каждой комплексной прямой (т. е. двумерной вещественной плоскости) в \mathbb{C}^{n-1} , проходящей через начало координат, некоторую вещественную прямую, то множество всех таких вещественных прямых (возникающих при рассмотрении всех комплексных прямых) естественно отождествляется с вещественным проективным пространством, что дает следующий диффеоморфизм: $S_l/Z_2 = \mathbb{RP}^{n-2}$. При этом описанное выше вложение каждой вещественной прямой в соответствующую ей комплексную прямую можно рассматривать как комплексификацию этой вещественной прямой, т. е. вложение $S_l/Z_2 = \mathbb{RP}^{n-2} \rightarrow \mathbb{CP}^{n-2}$, возникающее при переходе от прямой l к плоскости \mathbb{R}^2 , совпадает со стандартным вложением вещественного проективного пространства в комплексное проективное пространство. Следовательно, возникает индуцированное вложение $\mathbb{RP}^{n-2} \setminus (\Delta \cap \mathbb{RP}^{n-2}) \rightarrow \mathbb{CP}^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$. На $\mathbb{CP}^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ мы рассмотрим гладкую функцию $\tilde{V}: \mathbb{CP}^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^1$, индуцированную потенциалом $V: M \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}^1$, где $\tilde{\Delta} = \Delta/S^1$.

Лемма 2. Число классов относительного равновесия в точности равно числу критических точек гладкой функции $\tilde{V}: \mathbb{CP}^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Из определения класса (см. выше) следует, что каждый класс относительных равновесий однозначно определяется содержащимся в нем нормированным относитель-

ным равновесием, а эти последствия, в силу теоремы 1, однозначно соответствуют критическим точкам функции \tilde{V} . При этом мы используем тот факт, что при повороте двумерной плоскости относительное равновесие переходит снова в относительное равновесие, т. е. ортогональные преобразования переводят класс таких равновесий в себя.

Утверждение 2 (Смейл). Классы коллинеарных относительных равновесий находятся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками гладкой функции $\tilde{V}: \mathbb{CP}^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые лежат на подмногообразии $\mathbb{RP}^{n-2} \setminus (\Delta \cap \mathbb{RP}^{n-2}) \subset \mathbb{CP}^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ (стандартное вложение было описано выше).

Доказательство. Если относительное равновесие (т. е. конфигурация), задаваемое набором чисел $z = (z_1, \dots, z_n)$ коллинеарно, то все эти комплексные числа расположены на одной прямой, и путем ортогонального преобразования двумерной плоскости все их можно перевести на выделенную (и фиксированную) прямую $l \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}^1$. При этом, с одной стороны, мы не вышли из пределов одного класса коллинеарных относительных равновесий, а с другой стороны, оказались в критической точке ограничения потенциальной энергии на вещественное подмногообразие $\mathbb{RP}^{n-2} \setminus (\Delta \cap \mathbb{RP}^{n-2})$, стандартно вложенное в $\mathbb{CP}^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$. Утверждение доказано.

Таким образом, для описания коллинеарных равновесий достаточно описать все те критические точки потенциала, которые оказались расположеными на вещественном подмногообразии — вещественном проективном подпространстве. Для описания таких точек удобно изучить все критические точки ограничения потенциала на это вещественное подмногообразие. В общем случае, конечно, критическая точка ограничения функции на подмногообразии отнюдь не обязана быть и критической точкой самой функции на всем объемлющем многообразии (обратное, конечно, верно). Однако, как мы сейчас докажем, в данном конкретном случае, имеется взаимно однозначное соответствие между критическими точками ограничения потенциала на вещественное подпространство и критическими точками «полного» потенциала, расположенными на этом вещественном подпространстве.

Утверждение 3. Если $z \in \mathbb{RP}^{n-2} \setminus (\Delta \cap \mathbb{RP}^{n-2})$ — критическая точка ограничения потенциала \tilde{V} на подмногообразии $\mathbb{RP}^{n-2} \setminus (\Delta \cap \mathbb{RP}^{n-2}) \subset \mathbb{CP}^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$, то эта точка z является критической и для «полного» потенциала $\tilde{V}: \mathbb{CP}^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Рассмотрим фиксированные массы m_1, \dots, m_n и потенциал $V(z) = - \sum_{i \neq j} m_i m_j / |z_i - z_j|$. Тогда имеют

место следующие формулы: 1) первый дифференциал функции V равен

$$dV(z)(v) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|^2} (z_i - z_j, v_i - v_j),$$

где $v \in M$; 2) второй дифференциал функции V имеет вид

$$\begin{aligned} d^2V(z)(v, w) = & - \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|^3} \cdot \left(\frac{3}{|z_i - z_j|^2} (z_i - z_j, v_i - v_j) - \right. \\ & \left. - (v_i - v_j, w_i - w_j) \right) = Q_z(v, w), \end{aligned}$$

где $v, w \in M$. Здесь через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено евклидово скалярное произведение векторов на плоскости \mathbb{R}^2 ; 3) второй дифференциал сужения функции V на $S_K \setminus \Delta$ равен

$$d^2V|_{(S_K \setminus \Delta)}(z)(v, w) = Q_z(v, w) + V(z)K(v, w).$$

Здесь через K обозначена кинетическая энергия системы, рассматриваемая как скалярное произведение, определяемое заданными массами m_1, \dots, m_n . Все эти формулы получаются прямым вычислением, сводящимся к последовательному дифференцированию в локальных декартовых координатах, поэтому мы опустим подробности, предоставляя проверку указанных формул читателю.

Для каждого $v_i \in \mathbb{R}^2$ положим $v_i = (v'_i; v''_i)$, где $v'_i \in l$ и $v''_i \in l^\perp$ в плоскости \mathbb{R}^2 . Тогда для вектора v можно записать разложение: $v = (v', v'')$, где $v' = (v'_1, \dots, v'_n)$. Указанное разложение имеет место для любого вектора $v \in M$. Если $z \in S_l \subset S_K$, $z \notin \Delta$, то $T_z S_K = \{v \in M; v \perp z\}$; $T_z S_l = \{v' \in M_l; v' \perp z\}$, где на многообразии M фиксировано скалярное произведение K , определяемое заданными массами точек системы. Если $v \in T_z S_K$ и $v = (v', v'')$, то $v' \in T_z S_l$, так как $K(v, z) = K(v', z)$. Из полученных выше формул 1)–3) следует, что если $z \in S_l \setminus \Delta$, $v \in T_z S_K$, то $dV(z)(v) = dV(z)(v')$. Но тогда из равенства $dV(z)(v') = 0$ получаем, что $dV(z)(v) = 0$. Это последнее равенство и доказывает наше утверждение.

Лемма 3. *Многообразие $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ имеет $n!/2$ компонент линейной связности.*

Доказательство. Это геометрическое утверждение следует из определения биссекторных плоскостей. В самом деле, фиксируем точку $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_l \setminus \Delta$ и будем считать, что $z_1 < \dots < z_n$, $z_i \in \mathbb{R}$ (при этом мы пользуемся тем, что среди этих координат нет ни одной пары совпадающих чисел). Пусть теперь задана произвольная перестановка $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ чисел $(1, 2, \dots, n)$. Применяя эту перестановку к координатам исходного вектора z , мы переводим его в другую компоненту линейной связности, очевидно, однозначно определяемую данной

перестановкой (поскольку для всех векторов, принадлежащих одной компоненте связности, упорядочение координат вектора по их величине — одно и то же и определяется данной перестановкой). Таким образом, множество $S_l \setminus \Delta$ состоит из $n!$ компонент связности, следовательно, факторпространство $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ состоит из $n!/2$ компонент. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если точка $z \in \mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ является критической точкой ограничения потенциала \tilde{V} на $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$, то точка z является невырожденным максимумом.*

Доказательство. Воспользуемся формулой 2), полученной выше. Тогда, очевидно, из этой формулы следует, что для функции $V: S_l \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ второй дифференциал $d^2V|_{(S_l \setminus \Delta)}(z)$ является отрицательно определенной формой, что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы о коллинеарных равновесиях. Из явной формулы, определяющей потенциал \tilde{V} , следует, что эта функция стремится к $-\infty$, как только точка z стремится к множеству Δ ; это означает, что на границе каждой компоненты линейной связности множества $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ функция \tilde{V} стремится к $-\infty$, а потому на каждой компоненте имеет максимум. Из теории Морса немедленно следует, что двух критических точек на каждой компоненте линейной связности быть не может, поскольку каждая такая точка была бы невырожденным максимумом, и это породило бы по крайней мере еще одну седловую критическую точку, не являющуюся локальным максимумом. Полученное противоречие доказывает, что на каждой компоненте имеется ровно один невырожденный максимум (и больше никаких других критических точек нет). Поскольку число компонент нам известно и равно $n!/2$, то это и завершает доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы отчетливо видно, что предположение о коллинеарности всех тел системы (расположение их на одной прямой) было очень существенно в нескольких узловых местах доказательства; именно это и позволило нам полностью подсчитать число всех таких положений равновесия.

Если же мы вернемся к более общей задаче о подсчете числа классов относительных равновесий (без условий коллинеарности), то мы должны уметь описывать индексы и количество критических точек потенциала уже не на вещественном проективном пространстве, а на комплексном, что является уже значительно более трудной задачей.

Группа вращений S^1 действует на S_K , оставляя инвариантным особое множество Δ и потенциал V (см. об этом выше). Как мы уже видели, факторпространство S_K/S^1 естественно отож-

действляется с комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^{n-2}$, а особое множество $\tilde{\Delta} = \Delta / S^1$ можно рассматривать (в $\mathbb{C}P^{n-2}$) как объединение комплексных проективных подпространств. Снова рассмотрим функцию $\tilde{V}: \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$, индуцированную исходным потенциалом V .

Гипотеза. Для почти всех значений масс (m_1, \dots, m_n) в плоской задаче n тел потенциал \tilde{V} , индуцированный исходным потенциалом V , является функцией Морса, т. е. все критические точки этой гладкой функции невырождены.

Эта гипотеза пока что не доказана и не опровергнута. Ее роль заключается в том, что она возникла из вопроса о том, конечно ли число классов относительного равновесия (для почти всех наборов масс). Можно доказать (мы опускаем доказательство), что функция \tilde{V} не имеет никаких критических точек в некоторой открытой окрестности особого множества $\tilde{\Delta}$ в многообразии $\mathbb{C}P^{n-2}$. Отсюда, если сформулированная выше гипотеза верна, сразу следует, что число критических точек функции \tilde{V} , т. е. число классов относительных равновесий, конечно (для почти всех наборов масс).

Укажем на еще одно следствие из гипотезы. Если гипотеза верна, то для почти всех наборов масс число классов относительных равновесий можно оценить следующим образом. Сопоставим каждому относительному равновесию неотрицательное число — индекс критической точки (индуцированного потенциала \tilde{V}), соответствующей этому классу относительных равновесий (см. теорему выше). Тогда количества классов относительных равновесий, имеющих данный индекс, связаны соответствующими неравенствами Морса (см. элементарную теорию выше) с числами Бетти (т. е. с рангами групп вещественных гомологий) пространства $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$. В частности, достаточно богатые группы гомологий пространства $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ позволяют доказывать существование нетривиальных классов относительных равновесий. Кольцо когомологий пространства $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ можно вычислить в явном виде (Арнольд), а именно, это кольцо изоморфно кольцу когомологий достаточно простого топологического пространства X — прямого произведения букета двух окружностей на букет трех окружностей на букет четырех окружностей и т. д. на букет $n - 1$ окружностей. В явном виде полином Пуанкаре пространства $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ выглядит так: $\prod_{\alpha=2}^{n-1} (1 + \alpha t)$, т. е.

$$H^*(\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}) = H^*((S^1 \vee S^1) \times (S^1 \vee S^1 \vee S^1) \times \dots).$$

Глава 3

КОБОРДИЗМЫ И ГЛАДКИЕ СТРУКТУРЫ

§ 27. Характеристические числа. Кобордизмы. Циклы и подмногообразия. Сигнатура многообразий

I. Постановка задачи. Простейшие сведения о кобордизмах. Сигнатура.

Используя развитый в предыдущих главах аппарат, мы рассмотрим здесь некоторые задачи теории гладких многообразий.

1. Задача о кобордизме. Пусть задано замкнутое гладкое многообразие M^n . В каком случае оно является границей гладкого компактного многообразия с краем $M^n = \partial W^{n+1}$? Аналогичный вопрос, если оба M^n и W^{n+1} предполагаются ориентируемыми.

2. Задача о реализации циклов подмногообразиями. Пусть $x \in H_i(M^n; \mathbb{Z})$ или $y \in H_i(M^n; \mathbb{Z}_2)$. В каком случае найдется замкнутое подмногообразие $M^i \subset M^n$, представляющее цикл y (или x , если M^i ориентировано)?

3. Какие циклы — непрерывные образы многообразий? Пусть $x \in H_i(X; \mathbb{Z})$ или $y \in H_i(X, \mathbb{Z}_2)$ — элементы гомологий какого-либо клеточного комплекса X . В каком случае найдется «сингулярный бордизм» (M^i, f) — т. е. многообразие M^i и отображение $f: M^i \rightarrow X$ такое, что $f_*[M^i] = y$ (или $f_*[M^i] = x$ для ориентируемого многообразия M^i)? Аналогичные вопросы ставятся в относительном случае.

Пусть $x \in H_i(X, Y; \mathbb{Z})$ или $y \in H_i(X, Y; \mathbb{Z}_2)$. Нужно найти многообразие M^i с краем W^{i-1} и отображение пар $f: (M^i, M^{i-1}) \rightarrow (X, Y)$, такое, что $f_*[M^i, W^{i-1}] = y$ (или x в ориентируемом случае).

Естественно определяются группы «сингулярных бордизмов»: сингулярный бордизм — это пара (M^i, f) , как описано выше, где M^i — замкнутое многообразие. Цикл — это формальная линейная комбинация сингулярных бордизмов.

Сингулярная пленка — это пара (W^i, f) , где W^i — многообразие с краем. Граница сингулярной пленки — это сингулярный цикл. Факторгруппа группы всех i -мерных циклов (сингулярных бордизмов) по границам $(i+1)$ -мерных пленок является «группой

действляется с комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^{n-2}$, а особое множество $\tilde{\Delta} = \Delta/S^1$ можно рассматривать (в $\mathbb{C}P^{n-2}$) как объединение комплексных проективных подпространств. Снова рассмотрим функцию $\tilde{V}: \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$, индуцированную исходным потенциалом V .

Гипотеза. Для почти всех значений масс (m_1, \dots, m_n) в плоской задаче n тел потенциал \tilde{V} , индуцированный исходным потенциалом V , является функцией Морса, т. е. все критические точки этой гладкой функции невырожденны.

Эта гипотеза пока что не доказана и не опровергнута. Ее роль заключается в том, что она возникла из вопроса о том, конечно ли число классов относительного равновесия (для почти всех наборов масс). Можно доказать (мы опускаем доказательство), что функция \tilde{V} не имеет никаких критических точек в некоторой открытой окрестности особого множества $\tilde{\Delta}$ в многообразии $\mathbb{C}P^{n-2}$. Отсюда, если сформулированная выше гипотеза верна, сразу следует, что число критических точек функции \tilde{V} , т. е. число классов относительных равновесий, конечно (для почти всех наборов масс).

Укажем на еще одно следствие из гипотезы. Если гипотеза верна, то для почти всех наборов масс число классов относительных равновесий можно оценить следующим образом. Сопоставим каждому относительному равновесию неотрицательное число — индекс критической точки (индуцированного потенциала \tilde{V}), соответствующей этому классу относительных равновесий (см. теорему выше). Тогда количества классов относительных равновесий, имеющих данный индекс, связаны соответствующими неравенствами Морса (см. элементарную теорию выше) с числами Бетти (т. е. с рангами групп вещественных гомологий) пространства $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$. В частности, достаточно богатые группы гомологий пространства $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ позволяют доказывать существование нетривиальных классов относительных равновесий. Кольцо когомологий пространства $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ можно вычислить в явном виде (Арнольд), а именно, это кольцо изоморфно кольцу когомологий достаточно простого топологического пространства X — прямого произведения букета двух окружностей на букет трех окружностей на букет четырех окружностей и т. д. на букет $n - 1$ окружностей. В явном виде полином Пуанкаре пространства $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ выглядит так: $\prod_{i=2}^{n-1} (1 + \alpha_i t)$, т. е.

$$H^*(\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}) = H^*((S^1 \vee S^1) \times (S^1 \vee S^1 \vee S^1) \times \dots).$$

Глава 3

КОБОРДИЗМЫ И ГЛАДКИЕ СТРУКТУРЫ

§ 27. Характеристические числа. Кобордизмы. Циклы и подмногообразия. Сигнатура многообразий

I. Постановка задачи. Простейшие сведения о кобордизмах. Сигнатура.

Используя развитый в предыдущих главах аппарат, мы рассмотрим здесь некоторые задачи теории гладких многообразий.

1. Задача о кобордизме. Пусть задано замкнутое гладкое многообразие M^n . В каком случае оно является границей гладкого компактного многообразия с краем $M^n = \partial W^{n+1}$? Аналогичный вопрос, если оба M^n и W^{n+1} предполагаются ориентируемыми.

2. Задача о реализации циклов подмногообразиями. Пусть $x \in H_i(M^n; \mathbb{Z})$ или $y \in H_i(M^n; \mathbb{Z}_2)$. В каком случае найдется замкнутое подмногообразие $M^i \subset M^n$, представляющее цикл y (или x , если M^i ориентировано)?

3. Какие циклы — непрерывные образы многообразий? Пусть $x \in H_i(X; \mathbb{Z})$ или $y \in H_i(X; \mathbb{Z}_2)$ — элементы гомологий какого-либо клеточного комплекса X . В каком случае найдется «сингулярный бордизм» (M^i, f) — т. е. многообразие M^i и отображение $f: M^i \rightarrow X$ такое, что $f_* [M^i] = y$ (или $f_* [M^i] = x$ для ориентируемого многообразия M^i)? Аналогичные вопросы ставятся в относительном случае.

Пусть $x \in H_i(X, Y; \mathbb{Z})$ или $y \in H_i(X, Y; \mathbb{Z}_2)$. Нужно найти многообразие M^i с краем W^{i-1} и отображение пар $f: (M^i, M^{i-1}) \rightarrow (X, Y)$, такое, что $f_* [M^i, W^{i-1}] = y$ (или x в ориентируемом случае).

Естественно определяются группы «сингулярных бордизмов»: **сингулярный бордизм** — это пара (M^i, f) , как описано выше, где M^i — замкнутое многообразие. **Цикл** — это формальная линейная комбинация сингулярных бордизмов.

Сингулярная пленка — это пара (W^i, f) , где W^i — многообразие с краем. Граница сингулярной пленки — это сингулярный цикл. Факторгруппа группы всех i -мерных циклов (сингулярных бордизмов) по границам $(i + 1)$ -мерных пленок является «группой

бордизмов» и обозначается через $\Omega_i^0(X)$. Группы $\Omega_i^0(X, Y)$ определяются аналогично: циклы — это отображения многообразий с краем, где образ границы лежит в $Y \subset X$, а пленки вводятся естественно.

Исходя из класса ориентируемых многообразий и пленок, строят аналогично «ориентируемые бордизмы», которые обозначаются через $\Omega_i^{SO}(X)$ и $\Omega_i^{SO}(X, Y)$. Имеются очевидные отображения

$$\begin{aligned}\Omega_i^0(X) &\rightarrow H_i(X; \mathbb{Z}_2), \\ \Omega_i^0(X, Y) &\rightarrow H_i(X, Y; \mathbb{Z}_2), \\ \Omega_i^{SO}(X) &\rightarrow H_i(X; \mathbb{Z}), \\ \Omega_i^{SO}(X, Y) &\rightarrow H_i(X, Y; \mathbb{Z}_2).\end{aligned}$$

По самому своему определению группы Ω_i^0 и Ω_i^{SO} гомотопически инвариантны. Для стягиваемого пространства X (или точки) группы Ω_i^0 и Ω_i^{SO} могут оказаться нетривиальными. Эти группы Ω_i^0 и Ω_i^{SO} называются *классическими группами кобордизмов*. Прямое произведение многообразий вводят в них структуру косокоммутативных колец:

$$\begin{aligned}\Omega_i^0 \Omega_j^0 &\subset \Omega_{i+j}^0, \quad xy = yx, \\ \Omega_i^{SO} \Omega_j^{SO} &\subset \Omega_{i+j}^{SO}, \quad xy = (-1)^{ij} yx.\end{aligned}$$

В группах $\Omega^0 = \sum_{i>0} \Omega_i^0$ верно тождество

$$2x = 0.$$

Это, очевидно, следует из равенства

$$\partial(M^i \times I) = M^i \cup M^i = 2M^i.$$

При учете ориентации мы получим в $\Omega^{SO} = \sum_{i>0} \Omega_i^{SO}$

$$\partial(M^i \times I) = M_+^i \cup M_-^i.$$

Это означает, что многообразие с противоположной ориентацией дает обратный элемент в группах Ω_i^{SO} , так как сумма дается формальным объединением многообразий.

Элементарные сведения:

- a) $\Omega_0^0 = \mathbb{Z}_2$, $\Omega_0^{SO} = \mathbb{Z}$;
- б) $\Omega_i^0 = \Omega_i^{SO} = 0$;

в) $\Omega_2^{SO} = 0$ (из классификации поверхностей видим, что все ориентируемые многообразия M^2 лежат в \mathbb{R}^3 и ограничиваются областью \mathbb{W}^3).

Вычислим группы Ω_2^0 .

Лемма 1. Если замкнутое многообразие M^i является краем, т. е. $M^i = \partial W^{i+1}$, то его эйлерова характеристика четна: $\chi(M^i) = 2m$.

Доказательство. а) Пусть $i = 2k + 1$. Тогда $\chi(M^i) = 0$ силу двойственности Пуанкаре в гомологиях. б) Пусть $i = 2k$. Рассмотрим удвоение

$$V^{2k+1} = W^{2k+1} \cup_{M^{2k}} W^{2k+1}.$$

Из определения χ через триангуляцию комплекса следует:

$$\chi(X \cup_L Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(L),$$

где $L = X \cap Y$.

Мы получаем:

$$0 = \chi(V^{2k+1}) = 2\chi(W^{2k+1}) - \chi(M^{2k}).$$

Лемма доказана.

Так как $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$, то мы получаем:

$$\mathbb{RP}^2 \neq \partial W^3, \quad \Omega_2^0 \neq 0.$$

Легко строится пленка W^3 такая, что $\partial W^3 = K^2$ (бутилка Клейна). (Найдите эту пленку!) Из классификации поверхностей (см. § 3) мы знаем: любое неориентируемое двумерное замкнутое многообразие есть либо $\mathbb{RP}^2 +$ (ручки), либо $K^2 +$ (ручки).

Отсюда получается результат:

$$\Omega_2^0 = \mathbb{Z}_2 \quad (\text{базисный элемент } [\mathbb{RP}^2]).$$

Развивая геометрическую технику, можно доказать, что $\Omega_3^0 = \Omega_3^{SO} = 0$ и $\Omega_4^{SO} = \mathbb{Z}$ (Рохлин). Мы получим как эти результаты, так и много других из теории (Тома), использующей гомологические методы, изложенные выше. Развитием леммы 1 является следующая

Лемма 2 (Понtryагин). а) Если замкнутое многообразие M^i является краем в теории O -бордизмов Ω_i^0 , то все его стабильные характеристические числа (т. е. стабильные характеристические классы размерности i) равны нулю modulo 2.

б) Если замкнутое ориентируемое многообразие M^i является краем в теории SO -бордизмов (т. е. краем ориентируемого многообразия W^{i+1}), то дополнительно все его стабильные характеристические числа (т. е. классы размерности i) в когомологиях над полем рациональных чисел \mathbb{Q} равны нулю.

Доказательство. Касательное расслоение (с помощью, например, вложения $M^i \subset \mathbb{R}^N$, $N \rightarrow \infty$) получается тангенциальным отображением в базу универсального расслоения (обобщенное гауссово отображение $M^i \xrightarrow{\pi} G_{i, N} = BO_i$). Характери-

стический класс $\text{mod } 2$ определяется любым элементом $w \in H^*(G_{l, n}; \mathbb{Z}_2)$ (ср. [11, ч. II, § 25]). По определению, полагаем:

$$\omega(M^i) = \tau^*(w).$$

«Стабильные» характеристические классы $w \in H^*(BO_l)$ получаются ограничением

$$w = \lambda^* \bar{w},$$

где $\bar{w} \in H^*(BO_{l+1})$, $\lambda: BO(i) \rightarrow BO(i+1)$. Аналогично определяется понятие стабильного характеристического класса для BSO_l , BU_l , BSp_l .

Если $M^i = \partial W^{i+1}$, то мы имеем $\omega(M^i) = \tau_M^*(w) = \tau_M^*\lambda^*(\bar{w})$; $\bar{w}(W^{i+1}) = \tau_W^*(\bar{w})$. Обозначим вложение $M^i \rightarrow W^{i+1}$ через j . Ограничение расслоения имеет вид $\tau_W|_{M^i} = j^*\tau_W = \tau_M \oplus 1$. Пусть $\dim w = i$. Тогда

$$\omega(M^i) = \tau_M^*\lambda^*(\bar{w}) = j^*\tau_W^*(\bar{w}).$$

Так как $j_*[M^i] = 0$, поскольку $M^i = \partial W^{i+1}$, мы для скалярных произведений получаем:

$$(j^*\tau_W^*(\bar{w}), [M^i]) = (\tau_W^*(\bar{w}), i_*[M^i]) = 0.$$

Тем самым пункт а) доказан.

Доказательство пункта б) полностью идентично предыдущему с заменой \mathbb{Z}_2 -гомологий на гомологии над \mathbb{Q} и учетом факта, что в ориентируемом случае равенство $j_*[M^i] = 0$ в $H_i(W^{i+1})$ верно в рациональных гомологиях. Лемма 2 доказана.

Примером нестабильного характеристического класса является $\chi(M^i)$. Классы Штифеля—Уитни $w_q \in H^q(M^i; \mathbb{Z})$ и все полиномы от них размерности i , а также классы Понtryгина $p_q \in H^{4q}(M^i; \mathbb{Q})$ и все полиномы от них размерности i (если $i = 4k$) дают нам полный набор стабильных характеристических чисел для Ω_i^0 и Ω_i^{SO} .

При мер 1. $M^2 = \mathbb{R}P^2$; здесь $w(z) = (1 + zf)^3 = 1 + w_1z + w_2z^2$, где $t \in H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$, $t \neq 0$. Поэтому $w_1^2 \neq 0$ и $w_2 \neq 0 \pmod{2}$. Однако группа $\Omega_2^0 = \mathbb{Z}_2$. Поэтому имеем: $w_1 - w_2 \equiv 0 \pmod{2}$.

При мер 2. $M^4 = \mathbb{C}P^2$, ориентация естественна; здесь $\rho(z) = (1 + z^2t^2)^3 = 1 + p_1z^2$. Поэтому $p_1(\mathbb{C}P^2) = 3$ (полином Понtryгина $\rho(z)$ указан в § 9 для $\mathbb{C}P^n$), $t \in H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Q})$ — базисный элемент группы $H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$.

При мер 3. а) $M_1^8 = \mathbb{C}P^4$, ориентация естественна. Здесь $\rho(z) = 1 + p_1z^2 + p_2z^4 = (1 + t^2z^2)^3 = 1 + 5t^4z^2 + 10t^4z^4$, t — базисный элемент группы $H^2(\mathbb{C}P^4; \mathbb{Z})$.

Для характеристических чисел получаем:

$$p_1^2 = 25, \quad p_2 = 10,$$

б) $M_2^8 = \mathbb{C}P_1^2 \times \mathbb{C}P_2^2$. Здесь $\rho(z) = 1 + p_1z^2 + p_2z^4 = (1 + t_1^2z^2)^3(1 + t_2^2z^2)^3 = 1 + 3(t_1^2 + t_2^2)z^2 + 9t_1^2t_2^2z^4$, где $t_i \in H^2(\mathbb{C}P_i^2; \mathbb{Z})$ — базисные элементы.

Далее имеем: $(t_1^2)^2 = 0$, $(t_2^2)^2 = 0$, $(t_1^2 + t_2^2)^2 = 2t_1^2t_2^2$. Характеристические числа имеют вид

$$p_1^2 = 18, \quad p_2 = 9.$$

Кроме характеристических чисел имеется еще один интересный инвариант SO -кобордизма для ориентируемых многообразий размерности $4k$, называемый «сигнатурой» многообразия. В силу двойственности Пуанкаре (см. § 15) на группе гомологий средней размерности определена билинейная унимодулярная целочисленная форма, симметричная для размерностей $4k$ и кососимметрическая для размерностей $4k+2$ (например, для ориентируемых поверхностей при $k=0$). Эта форма порождена «индексом пересечения» циклов на группе гомологий $H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q})$ или умножением коциклов на группе $H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q}) \approx H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q})$,

$$\langle x, y \rangle = (xy, [M^{4k}]), \\ x, y \in H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q}),$$

или (это одно и то же)

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \tilde{x} \circ \tilde{y} \quad (\text{индекс пересечения}), \\ \tilde{x}, \tilde{y} \in H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q}).$$

Определение 1. Разность числа положительных и отрицательных квадратов указанной формы на группе $H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{Z})$ называется «сигнатурой» многообразия. При изменении ориентации $M \xrightarrow{\tau} -M^{4k}$ форма и сигнатура меняют знак. Сигнатура обозначается через $\tau[M^{4k}]$.

Лемма 3 (Рохлин). Сигнатура ограничивающего многообразия равна нулю и определяет корректно линейную форму

$$\tau: \Omega_{4k}^{SO} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Задача 1. Доказать, что сигнатура прямого произведения многообразий равна произведению сигнатур.

Тем самым мы получаем гомоморфизм колец

$$\tau: \Omega_*^{SO} = \sum_{i \geq 0} \Omega_i^{SO} \rightarrow \mathbb{Z},$$

где $\tau(1) = 1$, $\Omega_i^{SO} \xrightarrow{\tau} 0$, если i не делится на 4.

Доказательство леммы 3. По тривиальным причинам сигнатура несвязного объединения многообразий есть сумма сигнатур. Докажем, что сигнатура ограничивающего многообразия равна нулю. Пусть $M^{4k} = \partial W^{4k+1}$. Обозначим через j вложение

жение $M^{4k} \xrightarrow{j^*} W^{4k+1}$. Мы имеем $j_*[M^{4k}] = 0$ в группе $H_{4k}(W^{4k+1}; \mathbb{Q})$. Если два коцикла x, y получаются ограничением коциклов $\bar{x}, \bar{y} \in H^{2k}(W^{4k+1}; \mathbb{Q})$, то $\langle x, y \rangle = 0$. Действительно, если $x = j^*(\bar{x})$, $y = j^*(\bar{y})$, то

$$\langle x, y \rangle = (xy, [M^{4k}]) = (j^*(\bar{x}\bar{y}), [M^{4k}]) = (\bar{x}\bar{y}, j_*[M^{4k}]) = 0.$$

(Для циклов \bar{x}, \bar{y} это означает наглядный факт: если оба цикла гомологичны нулю в W^{4k+1} , то их индекс пересечения равен нулю.) Докажем, что размерность подгруппы $j^*H^{2k}(W^{4k+1}; \mathbb{Q}) \subset H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q})$ равна ровно половине размерности группы $H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q})$. Напишем две точные последовательности пары $(M^{4k}; W^{4k+1})$ в рациональных когомологиях и гомологиях, двойственные друг другу по Пуанкаре:

$$\begin{array}{ccccccc} H^{2k}(W^{4k+1}) & \xrightarrow{j^*} & H^{2k}(M^{4k}) & \xrightarrow{\delta} & H^{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k}) & \rightarrow & \\ \parallel_D & & \parallel_D & & \parallel_D & & \\ H_{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k}) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k}(M^{4k}) & \xrightarrow{j_*} & H_{2k}(W^{4k+1}) & \rightarrow & \end{array}$$

В силу оператора двойственности Пуанкаре гомоморфизм j^* переходит в ∂ и гомоморфизм δ переходит в j_* . Поэтому операторы j^* и δ сопряжены друг другу, где группа $H^{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k})$ сопряжена к $H^{2k}(W^{4k+1})$, и $H^{2k}(M^{4k})$ изоморфно своему сопряженному $(H^{2k}(M^{4k}))^* = H_{2k}(M^{4k})$ с помощью невырожденной формы $\langle x, y \rangle$. Отсюда вытекает чисто алгебраически совпадение рангов групп $\text{Im } j^*$ и $\text{Im } \delta$. В силу точности последовательностей ранг образа $\text{Im } j^*$ равен половине ранга группы $H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q})$. Из невырожденности формы $\langle x, y \rangle$ и факта существования нульпространства $\text{Im } j^*$ половинной размерности мы заключаем, что $\tau = 0$. Лемма 3 доказана.

Уже упоминалось выше, что $\Omega_4^{SO} = Z$ (будет позднее доказано, что $\Omega_4^{SO} \oplus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$). В примере 2 вычислялось число $p_1[\mathbb{C}P^2] = 3 \neq 0$. Заметим, что $\tau(\mathbb{C}P^2) = 1$, так как форма $\langle x, y \rangle$ на группе $H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ имеет вид $\langle x, x \rangle = 1$ (это очевидно следует из структуры кольца $H^*(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Q})$ — см. § 7). Так как $\tau = 1$, элемент $[\mathbb{C}P^2]$ не является ничьим кратным в группе $\Omega_4^{SO} = Z$ и любой элемент $x \in \Omega_4^{SO}$ имеет вид $x = \lambda [\mathbb{C}P^2]$. Из этого немедленно вытекает такое следствие (формула Тома—Рохлина): для любого ориентируемого многообразия верна формула

$$\tau[M^4] = \frac{1}{3} p_1[M^4]. \quad (*)$$

Действительно, для $\mathbb{C}P^2$ мы имеем

$$p_1[\mathbb{C}P^2] = 3, \quad \tau[\mathbb{C}P^2] = 1.$$

Величина p_1 — это тривиальна для $\mathbb{C}P^2$ и тем самым для всех элементов $x \in \Omega_4^{SO}$, так как $x = \lambda [\mathbb{C}P^2]$. Достаточно доказать, что $\Omega_4^{SO} \otimes \mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}$. Позднее мы вычислим группы $\Omega_i^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ и получим обобщение формулы (*) — формулу Хирцебруха.

Подобно эйлеровой характеристики, сигнатуру можно определить и для незамкнутых многообразий. Действительно, если $M = M^{4k}$ — гладкое ориентированное многообразие с краем $V = V^{4k-1} = V_1 \cup \dots \cup V_m$, то определена, вообще говоря, вырожденная форма пересечений на группе циклов $H_{2k}(M^{4k}, Q)$. Сигнатурой этой формы называется сигнатурой многообразия $\tau(M^{4k})$. Имеет место следующее «свойство аддитивности» (Новиков—Рохлин).

Аддитивность сигнатуры. Пусть M_1^{4k} и M_2^{4k} — гладкие многообразия с краями

$$\partial M_1^{4k} = \bigcup_j V_j, \quad \partial M_2^{4k} = \bigcup_q W_q$$

и $V_1^{4k-1} = W_1^{4k-1}$. Имеет место равенство

$$\tau(M_1^{4k} \bigcup_{V_1=W_1} M_2^{4k}) = \tau(M_1^{4k}) + \tau(M_2^{4k}).$$

Таким образом, сигнатура аддитивна при склейке двух многообразий вдоль целой компоненты границы. Аналогичный факт верен для эйлеровой характеристики четномерных многообразий: действительно,

$$\chi(M_1^{2q} \bigcup_{V_1} M_2^{2q}) = \chi(M_1^{2q}) + \chi(M_2^{2q}) - \chi(V_1),$$

где $\chi(V_1) = 0$, так как V_1 — нечетномерное замкнутое многообразие.

Докажем аддитивность сигнатуры. Группы гомологий $H_{2k}(M_1^{4k})$ и $H_{2k}(M_2^{4k})$ представляются в виде $H_{2k}(M_s^{4k}) = A_s \oplus B_s$, $B_s = \text{Im } i_{s*}$, где $i_s: V_1 = W_1 \rightarrow M_s^{4k}$, $s = 1, 2$.

Форма пересечений сосредоточена целиком на подпространстве A_s . Таким образом, $\tau(M_s^{4k}) = \tau(A_s)$. Группа $H_{2k}(M_1^{4k} \bigcup_{V_1=W_1} M_2^{4k})$ представляется в виде

$$H_{2k}(M_1 \cup M_2) = A_1 \oplus A_2 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus D \oplus F,$$

где

$$B_1 = C_1 \oplus D = \text{Im } i_{1*}: H_{2k}(V_1) \rightarrow H_{2k}(M_1),$$

$$B_2 = C_2 \oplus D = \text{Im } i_{2*}: H_{2k}(W_1) \rightarrow H_{2k}(M_2),$$

$$E \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus D = H_{2k}(V_1) = H_{2k}(W_1),$$

$$E = \text{Ker } i_{1*} \cap \text{Ker } i_{2*} \subset H_{2k}(V_1),$$

$$D = \text{Im} \{H_{2k}(V_1) \rightarrow H_{2k}(M_1 \bigcup_{V_1} M_2)\}.$$

Подгруппа F изоморфна пересечению

$$F' = \text{Ker } i_{1*} \cap \text{Ker } i_{2*} \subset H_{2k-1}(V_1) = H_{2k-1}(W_1),$$

причем две пленки в M_1 и M_2 , натянутые на один и тот же цикл из $F' \subset H_{2k-1}(V_1)$, дают вместе цикл из группы $F \subset H_{2k}(M_1 \cup M_2)$. Форма пересечений на группе $H_{2k}(M_1 \cup M_2)$ имеет вид блочной матрицы, где а) $C_1 \oplus C_2$ — аннулятор формы; б) на всех пространствах C_1, C_2, D, F форма по отдельности тривиальна, но пространства F и D сопряжены друг к другу; в) подпространства A_1, A_2 ортогональны в силу этой формы друг другу и всем остальным. Проверьте эти простые факты. Отсюда вытекает

$$\tau(M_1 \cup M_2) = \tau(A_1) + \tau(A_2).$$

Утверждение доказано.

II. Комплексы Тома. Вычисление ковордизмов (по модулю кручения). Формула сигнатуры. Реализация циклов подмногообразиями.

Рассмотрим связное замкнутое гладкое многообразие B и векторное расслоение ξ с базой B , слоем \mathbb{R}^n и группой $G = O(n), SO(n), U(n/2)$ и др.

$$\xi: E \xrightarrow{\rho} B, \quad F = \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим в слоях векторы длины < 1 . Их совокупность образует расслоение $\tilde{E} \rightarrow B$ со слоем $F' = D^n \subset \mathbb{R}^n$. Граница $\partial\tilde{E}$ есть расслоение со слоем S^{n-1} .

Определение 2. Комплексом Тома $M(\xi)$ расслоения ξ называется факторкомплекс

$$M(\xi) = \tilde{E}/\partial\tilde{E},$$

где $\partial\tilde{E}$ стянуто в одну точку.

Лемма 4. Имеется естественный изоморфизм

$$\phi: H_i(B) \rightarrow H_{n+i}(M(\xi)),$$

$$H^i(B) \rightarrow H^{n+i}(M(\xi)),$$

где $i \geq 0$ — любое и $n = \dim F$. Этот изоморфизм верен для гомологий mod 2, если $G = O(n)$, и для гомологий над $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$, если $G = SO(n)$. (Наглядно изоморфизм ϕ очевиден: для любого цикла z в базе B цикл $\phi(z)$ определяется как полный прообраз $\phi(z) = \rho^{-1}(z) \bmod \partial\tilde{E}$.)

Доказательство леммы 4 уже было дано (см. § 17, лемма 2) для эффективизации неравенств Морса в случае критических много-

образий. Напомним, что изоморфизм ϕ есть суперпозиция двух операторов двойственности Пуанкаре

$$\phi = D_{\tilde{E}} D_B$$

вместе с замечанием, что \tilde{E} имеет гомотопический тип B и $H^q(M(\xi)) = H^q(\tilde{E}, \partial\tilde{E})$, $q > 0$,

$$D_B: H_q(B) \rightarrow H^{m-q}(B), \quad m = \dim B,$$

$$D_{\tilde{E}}: H^{m-q}(\tilde{E}) \rightarrow H_{n+m-(m-q)}(\tilde{E}, \partial\tilde{E}).$$

$$\begin{array}{c} \| \\ H^{m-q}(B) \\ \| \\ H_{q+n}(M(\xi)) \end{array}$$

В когомологиях комплекса Тома $M(\xi)$ есть «фундаментальный класс» $\varphi(1) \in H^n(M(\xi))$. Кроме того, в комплексе $M(\xi)$ лежит сама база $B \subset M(\xi)$ как нулевое сечение расслоения ξ . Нормальное расслоение к B в $M(\xi)$ есть точно ξ , а дополнение $M(\xi) \setminus B$ стягивается к одной точке $* \in M(\xi)$.

Первым применением комплексов Тома является установление связи классов Штифеля—Уитни $w_i \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ для любого векторного расслоения ξ с базой B с квадратами Стиннода Sq^i .

Определение 3. Классом $w_i \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ называется элемент $\varphi^{-1}Sq^i\varphi(1)$, где

$$\phi: H^q(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+q}(M(\xi); \mathbb{Z}_2).$$

Для установления связи этого определения с тем, которое было дано ранее, следует проделать некоторые вычисления в когомологиях классифицирующих пространств $H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2)$ и $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)$. В группе $O(n)$ имеется подгруппа диагональных матриц $D(n) \subset O(n)$, имеющих вид

$$\begin{vmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{vmatrix}.$$

$D(n) = \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$. Тем самым имеется отображение классифицирующих пространств

$$BD(n) = RP_1^\infty \times \dots \times RP_n^\infty \xrightarrow{i^*} BO(n)$$

и отображение когомологий

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^*(BD(n); \mathbb{Z}_2).$$

Задача 2. По аналогии с группой $U(n)$ докажите такие факты: образ $\text{Im } i^*$ в точности совпадает с симметрическими многочленами от x_1, \dots, x_n , где $0 \neq x_i \in H^1(RP_i^\infty; \mathbb{Z}_2)$. При этом i^* — не имеет ядра (мономорфизм).

Классы Штифеля — Уитни получаются как элементарные симметрические многочлены

$$i^*(w_q) = \sum_{i_1 < \dots < i_q} x_{i_1} \dots x_{i_q}.$$

Задача 3. При отображении $BSO(n) \xrightarrow{i} BO(n)$ образ $\text{Im } i^*$ есть эпиморфизм («отображение на») в Z_2 -когомологиях, и ядро порождается как идеал элементом $w_1 \in H^1(BO(n); Z_2)$.

Задача 4. Рассмотрим комплексы Тома универсального расслоения ξ над $BO(n)$ и вложение $BO(n) \hookrightarrow M(\xi)$. Докажите, что отображение

$$f^*: H^*(M(\xi); Z_2) \rightarrow H^*(BO(n); Z_2)$$

не имеет ядра и образ $\text{Im } f^*$ состоит из всех полиномов от классов w_i , делящихся на $w_n \in H^n(BO(n); Z_2)$, где $i^* w_n = x_1 \dots x_n$. Докажите, что $f^* \varphi(1) = w_n$ и $f^* \varphi(w_i) = Sq^i(w_n) = w_i w_n$. Вообще, верна формула

$$f^* \varphi(x) = x w_n$$

(докажите).

Получите аналогичные результаты для $H^*(BSO(n); Z_2)$. Вычислите операции Sq^i в $H^*(MO(n); Z_2)$, аналогично § 10. Исследуйте гомотопические группы

$$\pi_{n+j}(M(\xi)), \quad j < n - 1,$$

используя результаты § 10.

Задача 5. Исходя из формулы $w_i = \varphi^{-1} Sq^i \varphi(1)$, докажите, что классы $w_i \in H^i(M^n; Z_2)$ гомотопически инвариантны для замкнутых многообразий, используя связь касательного расслоения с окрестностью диагонали в $M^n \times M^n$.

Задача 6. Для класса w_1 , который обращается в нуль тогда и только тогда, когда многообразие ориентируемо, имеет место формула

$$Dw_1 = \delta_*[M^n], \quad \delta_*: H_n(M^n; Z_2) \rightarrow H_{n-1}(M^n; Z_2),$$

где δ_* — оператор в гомологии, описанный в § 3. Докажите эту формулу независимо от задачи 5.

Для базы $B = BG$ для $G = O(n)$, $SO(n)$, $U(n/2)$, $SU(n/2)$, $Sp(n/4)$ и универсального расслоения ξ со слоем R^n комплекс Тома $M(\xi)$ обозначается обычно через $MO(n)$, $MSO(n)$, $MU(n/2)$, $MSU(n/2)$, $MSp(n/4)$.

Если $G = e$ (единичная группа), то универсальное расслоение ξ тривиально, база $BG = *$ (одна точка), но слой есть R^n . Мы получаем

$$Me = S^n.$$

В частности, $SO(1) = e$ и $MSO(1) = S^1$. Далее: $O(1) = \{\pm 1\}$, $BO(1) = RP^\infty$ (или RPN при большом N); универсальное рас-

слоение η с группой $O(1)$ имеет вид нормального расслоения к RPN в $RPN+1$:

$$E \xrightarrow{\rho} RPN, \quad \text{слой } F = R^1.$$

Пространство \tilde{E} расслоения со слоем $D^1 = I$ — векторов длины < 1 в слое есть «лист Мёбиуса» (см. [1], ч. II, § 2). Граница $\partial \tilde{E}$ есть сфера S^N , накрывающая RPN . Поэтому пространство Тома $M(\eta)$ имеет вид

$$M(\eta) = MO(1) = \tilde{E}/\partial \tilde{E} = RPN+1 \supset RPN = B.$$

Для $G = SO(2)$ мы имеем аналогично

$$\begin{array}{c} MSO(2) = CP^{N+1} \supset CP^N = B, \\ \parallel \\ MU(1) \end{array} \quad N \rightarrow \infty.$$

Фундаментальный класс в этих случаях есть базисный элемент групп

$$\begin{aligned} u &= \varphi(1) \in H^1(S^1; Z) \quad \text{для } MSO(1) = S^1; \\ u &= \varphi(1) \in H^1(RP^\infty; Z_2) \quad \text{для } MO(1) = RP^\infty; \\ u &= \varphi(1) \in H^2(CP^\infty; Z_2) \quad \text{для } MSO(2) = CP^\infty. \end{aligned}$$

Эти пространства являются комплексами типа $K(\pi, n)$ для $n = 1, 2, \pi = Z, Z_2$; элемент $u = \varphi(1)$ совпадает с фундаментальным элементом комплекса $K(\pi, n)$ — см. § 10.

Имеет место простая

Лемма 5. Комплексы Тома $M(\xi)$ односвязны при $n > 1$. Их простейшие гомотопические группы имеют вид:

$$\pi_j(M(\xi)) = 0, \quad 1 \leq j < n;$$

$$\pi_n(M(\xi)) = \begin{cases} Z_2, & \text{расслоение неориентируемо,} \\ Z, & \text{расслоение ориентируемо.} \end{cases}$$

Доказательство. Клеточное разбиение $M(\xi)$ получается из клеточного разбиения базы B умножением на одну клетку (слой)

$$B \subset \sigma^j \mapsto \varphi(\sigma^j) = p^{-1}(\sigma^j) = \sigma^{n+j}.$$

Кроме того, имеется одна нульмерная клетка $\sigma^0 \subset M(\xi)$, полученная из $\partial \tilde{E}$ стягиванием в точку. Поэтому $\pi_j(M(\xi)) = 0$ для $j < n$ (в этих размерностях нет клеток). Пусть B имеет только одну нульмерную клетку (для связного B к этому случаю всегда можно свести, как показано в § 4); тогда в $M(\xi)$ имеется всего одна клетка размерности n (это — слой над одной точкой). Итак, группа $\pi_n(M(\xi))$ циклическая. Для неориентируемого расслоения в базе найдется замкнутый путь (который можно считать

одной клеткой σ^1), который обращает ориентацию слоя. Для такой клетки σ^1 ее прообраз $p^{-1}(\sigma^1) = \varphi(\sigma^1) = \sigma^{n+1}$ есть клетка в $M(\xi)$ такая, что

$$\partial\sigma^{n+1} = 2\sigma^n.$$

Это геометрически очевидно в расслоении над S^1 . Если расслоение ориентируемо, то границы всех клеток $p^{-1}(\sigma^1)$ в комплексе $M(\xi)$ равны нулю. Поэтому цикл $[\sigma^n]$ бесконечного порядка. Лемма доказана, так как $H_n(M(\xi)) = \pi_n(M(\xi))$.

Имеет место следующая важная

Теорема 1. Группы кобордизмов Ω_i^0 , Ω_i^{SO} канонически изоморфны стабильным гомотопическим группам

$$\pi_{n+i}(MO(n)) \approx \Omega_i^0 \text{ и } \pi_{n+i}(MSO(n)) \approx \Omega_i^{SO}$$

для $i < n - 1$ (ср. [1], ч. II, § 23, где была установлена связь между группами $\pi_{n+i}(S^n) = \pi_{n+i}(Me)$ и кобордизмами оснащенных многообразий).

Доказательство. а) Рассмотрим замкнутое многообразие $M^i \subset \mathbb{R}^{n+i}$, где $i < n - 1$. Все вложения $M^i \subset \mathbb{R}^{n+i}$ изотопны (см. [1], ч. II, § 11), и нормальное расслоение к M^i в \mathbb{R}^{n+i} не зависит от вложения. Обозначим его через v . Возникает отображение в универсальное расслоение

$$\begin{aligned} M^i &\rightarrow BO(n), \\ v &\rightarrow \xi, \end{aligned}$$

где ξ — универсальное расслоение со слоем \mathbb{R}^n . Пространство расслоения v — это окрестность M^i в $\mathbb{R}^{n+i} \subset S^{n+i}$, а ее образ покрывает все тело \bar{E} . Продолжим это отображение на все дополнение к окрестности так, чтобы все это дополнение переходило в одну клетку $\sigma^0 \in M(\xi)$, полученную стягиванием $\partial\bar{E}$. Мы получаем отображение сферы

$$S^{n+i} \xrightarrow{f} M(\xi).$$

Это отображение трансверсально регулярно на подмногообразии $BO(n) \subset M(\xi)$ и $f^{-1}(BO(n)) = M^i$. Понятие трансверсальной регулярности вдоль подмногообразия $BO(n) \subset M(\xi)$ состоит в следующем: в любой точке $x \in f^{-1}(BO(n))$ образ касательного пространства \mathbb{R}_x^{n+i} при линейном отображении df трансверсален к касательной плоскости подмногообразия $BO(n) \subset M(\xi)$, т. е. совместно линейные пространства $df(\mathbb{R}_x^{n+i})$ и $T_{f(x)}(BO(n))$ порождают все касательное пространство к $M(\xi)$ в точке $f(x)$ (см. [1], ч. II, § 10).

Кобордизм (пленку) W^{i+1} , где $\partial W^{i+1} = M_1^i \cup M_2^i$, мы расположим в произведении $\mathbb{R}^{n+i} \times I(0, 1)$ так, что $M_1^i \subset \mathbb{R}^{n+i} \times 0$, $M_2^i \subset \mathbb{R}^{n+i} \times 1$ и W^{i+1} нормально подходит к краям. Повторив

предыдущую конструкцию для нормального пучка v к $W^{i+1} \subset \mathbb{R}^{n+i} \times I$, мы получаем гомотопию

$$S^{n+i} \times I(0, 1) \rightarrow M(\xi).$$

Итак, построено соответствие (гомоморфизм)

$$\Omega_i^0 \rightarrow \pi_{n+i}(MO(n)), \quad i < n - 1.$$

Аналогично строится гомоморфизм

$$\Omega_i^{SO} \rightarrow \pi_{n+i}(MSO(n)), \quad i < n - 1.$$

б) Покажем, что построенное соответствие есть изоморфизм. Пусть дан элемент $a \in \pi_{n+i}(MO(n))$, представленный отображением

$$f: S^{n+i} \rightarrow MO(n).$$

Можно считать, сделав малое возмущение (см. [1], ч. II, § 10), что отображение f трансверсально регулярно вдоль подмногообразия $BO(n) \subset MO(n)$. Полный прообраз $f^{-1}(BO(n)) = M^i$ есть гладкое неособое подмногообразие $M^i \subset \mathbb{R}^{n+i} \subset S^{n+i}$. Образ нормальных n -плоскостей к M^i в \mathbb{R}^{n+i} при отображении df трансверсален к $BO(n)$. Элементарной деформацией отображения этот образ всюду вдоль $BO(n)$ может быть сделан нормальным к $BO(n)$, а все дополнение к окрестности многообразия M^i в S^{n+i} можно стянуть в точку σ^0 , полученную из $\partial\bar{E}$ в $MO(n)$. Отсюда следует доказательство теоремы 1 для Ω_i^0 . Для Ω_i^{SO} все аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 2. а) Цикл $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z}_2)$ тогда и только тогда реализуется замкнутым подмногообразием $M^i \subset M^{n+i}$, когда найдется отображение $M^{n+i} \rightarrow MO(n)$ такое, что $f^*u = -Dx$, где $u \in H^n(MO(n); \mathbb{Z}_2)$ — фундаментальный класс и D — оператор двойственности Пуанкаре.

б) Пусть M^{n+i} — ориентированное многообразие. Цикл $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z})$ тогда и только тогда реализуется замкнутым ориентированным подмногообразием $M^i \subset M^{n+i}$, когда найдется отображение $f: M^{n+i} \rightarrow MSO(n)$ такое, что $f^*u = Dx$.

в) Цикл $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z})$ тогда и только тогда реализуется замкнутым ориентированным подмногообразием с тривиальным нормальным расслоением $M^i \subset M^{n+i}$ (т. е. заданным набором неособых уравнений $\psi_1 = 0, \dots, \psi_n = 0$ в M^n), когда найдется отображение $f: M^{n+i} \rightarrow Me = S^n$ такое, что $f^*u = Dx$.

Замечание. Аналогичная теорема верна для возможности реализации цикла подмногообразием с предписанным нормальным расслоением со структурой группой $U(n/2)$, $SU(n/2)$, $Sp(n/4)$ и т. д. Отображение многообразия M^{n+i} в $MU(n/2)$, $MSU(n/2)$, $MSp(n/4)$ и т. д. порождает такую реализацию.

Группы π_{n+i} ($MU(n/2)$) = Ω_i^U , π_{n+i} ($MSU(n/2)$) = Ω_i^{SU} , π_{n+i} ($MSp(n/4)$) = Ω_i^{Sp} естественно можно истолковывать как комплексные (унитарные) специально комплексные и кватернионные ковордизмы Ω_i^U , Ω_i^{SU} , Ω_i^{Sp} . Особенno важны унитарные ковордизмы. Каждое комплексное и квазикомплексное многообразие имеет класс ковордизмов в группах Ω_{2i}^U .

Доказательство теоремы 2 для $G = O(n)$.

Пусть задано подмногообразие $M^i \subset M^{n+i}$. Нормальное раслоение определяет уже изложенной конструкцией отображение $M^{n+i} \xrightarrow{f} MO(n)$, где $M^i \xrightarrow{f} BO(n)$; все дополнение к окрестности многообразия M^i в M^{n+i} переходит в точку o^0 , полученную стягиванием ∂E при построении M (§). Легко видеть, что

$$f^*u = D[M^i].$$

Обратно: если задано трансверсально регулярное вдоль $BO(n) \subset MO(n)$ отображение $f: M^{n+i} \rightarrow MO(n)$, то полный прообраз $M^i = f^{-1}(BO(n))$ таков, что $f^*u = D[M^i]$. Для $G = SO(n)$ и др. все аналогично.

Теорема доказана.

В некоторых случаях комплексы $MO(i)$, $MSO(i)$ являются комплексами типа $K(\pi, n)$. Это случаи:

$$MSO(1) = Me = S^1 = K(Z, 1), \quad \pi_j = 0, \quad j > 1,$$

$$MO(1) = RP^\infty = K(Z_2, 1), \quad \pi_j = 0, \quad j > 1,$$

$$MSO(2) = CP^\infty = K(Z, 2), \quad \pi_j = 0, \quad j \neq 2.$$

При этом элемент $\varphi(1) = u \in H^n(MG)$ совпадает с фундаментальным классом комплекса $K(\pi, n)$ в этих трех случаях *).

Следствие 1. а) Любой цикл $x \in H_n(M^{n+i}; Z_2)$ при всех n реализуется замкнутым подмногообразием.

б) Любой цикл $x \in H_n(M^{n+i}; Z)$ и $x \in H_n(M^{n+2}; Z)$ при всех n реализуется замкнутым ориентируемым подмногообразием.

Вывод следствия из теоремы 2 сводится к тому, что коцикл $Dx = u$ для этих случаев представляется в виде образа f^*u , согласно основному свойству $K(\pi, n)$, так как $MO(1)$, $MSO(1)$, $MSO(2)$ — это комплексы $K(\pi, 1)$.

Следствие 2. Если $i < n/2$, то для любого цикла $x \in H_i(M^n; Z)$ найдется число $\lambda \neq 0$ такое, что цикл λx представляется подмногообразием $M^i \subset M^{n+i}$.

Это следствие извлекается из теоремы 2 с помощью результатов § 10: было установлено, что в стабильных размерностях

*) Более сложная теорема (Тома) утверждает, что все комплексы $MO(n)$ до размерности $2n - 1$ гомотопически эквивалентны прямому произведению комплексов типа $K(Z_2, m_j)$, где $m_j \geq n$.

любой комплекс (здесь — $MSO(n)$) «устроен так же, как произведение комплексов типа $K(\pi, m)$, где $m \geq n$, если все умножить тензорно на поле \mathbb{Q} ».

Следствие 3. Для любого цикла $x \in H_i(X; Z)$ найдется число $\lambda \neq 0$ такое, что цикл λx есть образ многообразия M^i ,

$$\varphi: M^i \hookrightarrow X,$$

$$\varphi_*[M^i] = x.$$

Доказательство состоит во вложении $X \subset \mathbb{R}^{n+i}$ и в рассмотрении многообразия с краем $U \supset X$, которое стягивается к X : $U \sim X$. После этого цикл $\lambda x \in H_i(U) \approx H_i(X)$ реализуется на основе следствия 2 как подмногообразие с помощью отображения $(U, \partial U) \xrightarrow{f} MSO(N)$, где ∂U переходит в точку и $f^*u = D[M^i]$.

Следствие 4. Естественный гомоморфизм

$$\Omega_i^{SO}(X, Y) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_i(X, Y; \mathbb{Q})$$

групп бордизмов в гомологии является «эпиморфизмом» (отображением на все).

Для комплексов без нечетного кручения в гомологиях $H_*(X, Y; \mathbb{Z})$ верна теорема (Новиков), устанавливающая аналогичный факт без тензорного умножения на поле \mathbb{Q} , — т. е. циклы реализуются образами многообразий без кратностей.

Перейдем теперь к следствиям теоремы 1 и теоремы Кардана—Серра (см. § 10). Кольцо $H^*(BSO(n); \mathbb{Q})$ порождается характеристическими классами и является кольцом полиномов от элементов (классы Понтрягина и класс Эйлера—Пуанкаре):

$$p_i \in H^{4i}(BSO(n); \mathbb{Q});$$

$$x \in H^{2n}(BSO(2n); \mathbb{Q}).$$

При этом для $j < n$ и $j \neq 4k$ имеем:

$$H^{n+i}(MSO(n); \mathbb{Q}) = 0.$$

Ранг стабильных групп

$$H^{4k}(BSO(n); \mathbb{Q}) \xrightarrow{\varphi} H^{n+4k}(MSO(n); \mathbb{Q})$$

для $4k < n$ равен числу разбиений числа k на слагаемые, $k = m_1 + \dots + m_q$, поскольку базис состоит из одночленов $z = p_{m_1} p_{m_2} \dots p_{m_q}$ (совпадения $m_i = m_j$ возможны), $\deg z = 4(m_1 + \dots + m_q)$.

Для размерностей $4k = 4, 8$ мы выписали выше (см. п. I) характеристические числа многообразий $[CP^2] \in \Omega_4^{SO}$ и $[CP^2]^2$, $[CP^4] \in \Omega_8^{SO}$.

Из теоремы 1 вместе с теоремой Картана—Серра следует

Теорема 3. Группы $\Omega_j^{SO} \otimes Q = 0$ для $j \neq 4k$; $\Omega_{4k}^{SO} \otimes Q$ — это группа ранга, равного числу возможных линейно независимых векторов — характеристических чисел многообразий M^{4k} . Для $4k = 4, 8$ из вычислений (см. выше) следует, что набор характеристических чисел в Q -когомологиях полностью определяет класс кобордизмов $x \in \Omega_{4k}$ с точностью до кручения *).

Задача 7. Проведите вычисление векторов характеристических чисел произведений $CP_1^{2n_1} \times \dots \times CP_k^{2n_k}$ и покажите, что все эти векторы линейно независимы.

Следствие. Сигнатура $\tau[M^{4k}]$ является линейной формой от векторов характеристических чисел.

Доказательство. Мы знаем, что τ — это линейная форма $\Omega_{4k}^{SO} \otimes Q$, согласно лемме 3 (см. выше), в то время как характеристические числа дают полный базис форм. Следствие доказано.

Для $4k = 4, 8$ мы имеем:

$$k=1: p_1[CP^2] = 3, \quad \tau[CP^2] = 1; \quad \Omega_4^{SO} \otimes Q = Q.$$

$$\text{Вывод: } \tau = \frac{1}{3} p_1. \quad (1)$$

$k=2$: мы уже получили матрицу (см. п. I):

	$[CP^2] \times [CP^2]$	$[CP^4]$
p_1^2	18	25
p_2	9	10
τ	1	1

Вывод. Имеет место формула

$$\tau = \frac{1}{45} (7p_2 - p_1^2). \quad (2)$$

Можно получить общую формулу для всех k в удобной аналитической форме (Хирцебрух).

Уместно поставить более общую задачу: пусть задана произвольная числовая характеристика на кобордизмах $\Omega_*^G = \sum \Omega_i^G$ для $G = U, SO$

$$B: \Omega_*^G \rightarrow C$$

такая, что $B(1) = 1$, $B(M_1^n \cup M_2^n) = B(M_1^n) + B(M_2^n)$,

* Полную информацию о структуре колец Ω^{SO} , Ω^U читатель может найти в обзоре [60].

$B(M_1^n \times M_2^n) = B(M_1^n) B(M_2^n)$, т. е. аддитивная и мультипликативная (относительно прямого произведения многообразий). Фактически, нам интересно только кольцо $\Omega_*^G \otimes Q$, которое определяется характеристическими числами — полиномами от c_i или p_i . Для любой четной размерности $n = 2k$ в случае $G = U$ мы имеем полином $B_k(c_1, \dots, c_k)$ такой, что $B[M^{2k}] = (B_k(c_1, \dots, c_k), [M^{2k}])$, где M^{2k} — «унитарное» многообразие (т. е. многообразие, в стабильное нормальное расслоение которого при вложении $M^1 \subset \mathbb{R}^{2N-1}$ введена структура U -расслоения; в частности, U -структура получается как слабое отражение комплексной (или квазикомплексной) структуры многообразий, «помнящее» характеристические классы). Для $G = SO$ мы имеем полиномы $B_k(p_1, \dots, p_k)$ для всех размерностей $n = 4k$ такие, что

$$B[M^{4k}] = (B_k(p_1, \dots, p_k), [M^{4k}]).$$

Случай $G = SO$ сводится к $G = U$ дополнительным требованиям $B_{2k+1}(c_1, \dots, c_{2k+1}) = 0$, как будет видно далее.

Последовательность многочленов ($B_0 = 1, B_1, B_2, \dots, B_k, \dots$) не произвольна, а сильно связана требованием мультипликативности $B(M^{2k} \times M^{2l}) = B(M^{2k}) B(M^{2l})$.

Будем искать ответ в следующем виде: задан формальный ряд

$$B(zt) = 1 + a_1 zt + a_2 z^2 t^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} B_k(\eta) z^k, \quad t \in H^2(CP^\infty; Z),$$

с числовыми коэффициентами, определяющий характеристический класс B для одномерных U -расслоений. Полагаем

$$B_k(c_1, \dots, c_k) = \left[\prod_{i=1}^k B(zt_i) B(zt_2) \dots B(zt_n) \right]_k = B_k(\sigma_1, \dots, \sigma_k),$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ — элементарные симметрические полиномы от t_1, \dots, t_n .

Для случая $G = SO$ ряд $B(zt)$ следует брать в виде $B(zt) = P(z^{2k/2})$, классы p_k имеют вид $p_k \leftrightarrow \sigma_k(t_1^k, \dots, t_n^k)$ — см. выше. Согласно формуле Коши мы можем написать

$$B_k(c_1, \dots, c_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \prod_{i=1}^k B(zt_i) \dots B(zt_n) \frac{dz}{z^{k+1}} \quad (n \geq k).$$

Для CP^n мы имеем, согласно формулам характеристических классов касательного расслоения,

$$t_1 = t_2 = \dots = t_{n+1} = t \in H^2(CP^n; Z),$$

$$\tau_{CP^n} \oplus 1 = \eta \oplus \dots \oplus \eta (n+1 \text{ слагаемых}),$$

$$B(\eta) = \sum B_k(\eta) z^k, \quad B(\tau_{CP^n}) = B(\eta)^{n+1}.$$

Для числа $B[CP^n]$ мы имеем

$$B[CP^n] = [B(\eta)^{n+1}]_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} B(z)^{n+1} \frac{dz}{z^{n+1}}$$

(n -я компонента ряда по z).

Пример 1. $B[CP^{2n}] = 1$, $B[CP^{2n+1}] = 0$. Здесь $B(zt) = zt/\ln(zt)$. В этом случае B совпадает с сигнатурой τ :

$$B = \tau, B_k = L_k(p_1, \dots, p_k).$$

Это дает общую формулу для полиномов Хирцебруха

$$\tau = (L_k(p_1, \dots, p_k), [M^{4k}]).$$

Пример 2. $B(CP^n) = 1$ для всех n . Здесь

$$B(zt) = zt/(1 - \exp(-zt)).$$

Это — так называемый «род Тодда» $T[M^{2n}]$ алгебраических (комплексных многообразий): согласно теореме (Хирцебруха) $T[M^{2n}] = \sum (-1)^i r_i$, где r_i — размерности пространств чисто голоморфных дифференциальных форм на многообразии M^{2n} ;

$$T_0 = 1, \quad T_1 = \frac{1}{2} c_1, \quad T_2 = \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2), \quad T_3 = \frac{1}{24} c_1 c_2.$$

Выведем общую формулу для ряда $B(z)$ в случае произвольной характеристики $B: \Omega_*^U \rightarrow \mathbb{C}$. Введем каждый формальный ряд $\sum_{n>0} [CP^n] z^n$ и его «интеграл» $g(z) = \sum_{n>0} \frac{[CP^n]}{n+1} z^{n+1}$. Сопоставим этому ряду значение характеристики B :

$$gB(z) = \sum_{n>0} \frac{B(CP^n)}{n+1} z^{n+1}.$$

Мы имеем

$$B(CP^n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=r} \frac{B^{n+1}(t)}{t^{n+1}} dt,$$

$$\begin{aligned} \frac{dgB(z)}{dz} &= \sum_{n>0} B(CP^n) z^n = \frac{1}{2\pi i z} \sum_{n>0} \oint_{|w|=r} \left(\frac{B(w)}{w} z \right)^{n+1} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r} \frac{B(w)/w}{1 - zB(w)/w} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r} \frac{dw}{w/B(w) - z}, \\ &\quad \left| \frac{zB(w)}{w} \right| < 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$gB(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^z \oint_{|w|=r} \frac{dw dv}{(w/B(w)) - v}, \quad |z| < \left| \frac{w}{B(w)} \right|.$$

Интегрируя по v , находим:

$$gB(z) = \left[\frac{z}{B(z)} \right]^{-1},$$

так как этот интеграл изображает обратную функцию. Итак, мы получили общий ответ (Новиков):

$$B(z) = \frac{z}{g^{-1}(z)}, \quad (3)$$

где

$$gB(z) = \sum_{n>0} \frac{B(CP^n)}{n+1} z^{n+1}.$$

III. Некоторые применения формулы сигнатуры. Сигнатура и проблема инвариантности классов.

Покажем, что на базе понятия сигнатуры могут быть определены и сами характеристические классы p_k в Q когомологии.

Рассмотрим цикл $x \in H_4(M^n)$ и вычислим скалярное произведение (p_k, x) только через сигнатуру. Можно считать, что $4k < n/2 - 1$ (если это не так, перейдем от многообразия M^n к $M^n \times S^k$). Коцикл $y = D(x) \in H^{n-4k}(M^n)$ можно, умножая на $\lambda \neq 0$, реализовать в виде образа при отображении

$$\begin{aligned} f: M^n &\rightarrow S^{n-4k} = M^k, \\ f^*(u) &= \lambda u. \end{aligned}$$

Это следует из результатов п. II. Полный прообраз $f^{-1}(x_0)$ правильной (регулярной) точки $x_0 \in S^{n-4k}$ есть подмногообразие с тривиальным нормальным расслоением

$$i: M^{4k} \times \mathbb{R}^{n-4k} \subset M^n,$$

где $i_*[M^{4k}] = \lambda x \in H_{4k}(M^n)$.

Для $k = 1$ мы полагаем:

$$(p_1, x) = \frac{1}{\lambda} (p_1, \lambda x) = \frac{1}{\lambda} 3\tau(M^{4k}).$$

на основании формулы (1) и тривиальности нормального расслоения к $M^{4k} \subset M^n$.

Это дает новое определение класса p_1 . Аналогично для класса p_2 из (2) имеем:

$$(p_2, x) = \frac{1}{\lambda} (p_2, \lambda x) = \frac{1}{7\lambda} [45\tau(M^{4k}) + (p_1^2, \lambda x)].$$

Из общей формулы Хирцебруха можно извлечь, что для всех k класс p_k можно выразить через $\tau(M^{4k})$ и произведение классов низших размерностей. Это дает новое определение классов p_k . «Сигнатурное» определение позволяет без труда доказать инвариантность рациональных классов p_k при кусочно-линейных (кусочно-гладких) гомеоморфизмах (идею см. ниже) и играет

важную роль в доказательстве инвариантности классов p_k относительно любых непрерывных гомеоморфизмов. Сигнатуру определяют, как видно, существенно рационально: в нем содержатся «необходимые» знаменатели — например, $1/7$ для класса p_2 . Это имеет последствия: целочисленные классы $p_k \in H^{4k}(M^n; \mathbb{Z})$, которые, по определению, являются инвариантами диффеоморфизма, иногда бывают элементами конечного порядка; 7-кручение класса p_2 оказывается неинвариантным относительно непрерывных гомеоморфизмов.

Рассмотрим кусочно-линейное (триангулированное) многообразие M^n и его симплексиальное отображение в сферу $M^n \xrightarrow{f} S^{n-4k}$. Тогда полный прообраз внутренней части симплекса $\sigma^{n-4k} \subset S^{n-4k}$ имеет вид (проверьте!)

$$\sigma^{n-4k} \times p^{-1}(y_0) = f^{-1}(\sigma^{n-4k}) = \sigma^{n-4k} \times M^{4k} \subset M, \quad y_0 \in \sigma^{n-4k},$$

где M^{4k} — это также триангулированное многообразие или хотя бы комплекс, для любой точки которого $x_0 \in M^{4k}$ мы имеем «локальные гомологии сферы»

$$\begin{aligned} H_i(M^{4k}, M^{4k} \setminus x_0) &= 0, \quad i \neq 4k, \\ H_{4k}(M^{4k}, M^{4k} \setminus x_0) &= \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Задача 8. Докажите, что для гомологических многообразий (4) верна двойственность Пуанкаре в гомологиях, определена сигнатурой $\tau(M^{4k})$ с обычными свойствами: если $M^{4k} = \partial W^{4k+1}$, где оба — гомологические многообразия, то $\tau = 0$.

Эти свойства позволяют дать чисто симплексиальное (и комбинаторно-инвариантное) определение классов $p_k \in H^*(M; \mathbb{Q})$ (Том, Рохлин — Шварц) на базе формулы сигнатуры. Класс $p_2 \in H^8(M; \mathbb{Z})$ не допускает комбинаторного определения и комбинаторно (топологически) неинвариантен (Милнор, Кервер).

Переходя к проблеме топологической инвариантности классов $p_k \in H^{4k}(M; \mathbb{Q})$, можно без ограничения общности считать все многообразия $M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}$ односвязными. Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим вложение тора $T^{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ и открытую область в изучаемом многообразии:

$$M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R} \subset M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}.$$

В любой гладкой структуре область

$$M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R} \subset M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}$$

есть гладкое многообразие. Используя более сложную технику классификационной теории гладких односвязных многообразий, распространенную на случай многообразий со свободными абелевыми группами $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$, доказывается такое утверждение (простейший вариант): если $\pi_1(M^{4k}) = 0$, то гладкое универсальное накрытие над открытым гладким многообразием $M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R}$ (заданным в любой гладкой структуре) диффео-

морфно $\tilde{M}^{4k} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\rho} M^{4k} \times \mathbb{R} \times T^{n-1}$, где \tilde{M}^{4k} — гладкое многообразие. Отсюда индукцией по k выводится утверждение, что величина $\tau(M^{4k}) = \tau(\tilde{M}^{4k})$ определяет характеристические классы p_1, \dots, p_k топологически инвариантным образом (Новиков). До сих пор неизвестны никакие доказательства этой теоремы, где удалось бы избавиться от, казалось бы, искусственного использования вспомогательных областей со свободной абелевой группой π_1 в этой «чисто односвязной» проблеме, по постановке не связанный с π_1 .

Отметим, что уже класс $p_1 \in H^4(M^4; \mathbb{Q})$, в отличие от гомологий и классов Штифеля — Уитни, не является гомотопическим инвариантом (Дольд). Рассмотрим расслоения (пусть $\chi = 0$ при $n = 4$) над сферой S^4 со слоем S^{n-1} , группой $G = SO(n)$ и всевозможными классами $p_1(\xi) \in H^4(S^4; \mathbb{Z})$. Пространство такого расслоения $E \rightarrow S^4$, $F = S^{n-1}$ имеет клетки $\sigma^0, \sigma^4, \sigma^{n-1}, \sigma^{n+3}$, где $d\sigma^4 = d\sigma^{n-1} = 0$, $d\sigma^{n+3} = 0$. Поэтому E имеет вид

$$E = (S^4 \vee S^{n-1}) \cup_{\alpha} \sigma^{n+3},$$

где $\alpha \in \pi_{n+2}(S^4 \vee S^{n-1})$.

Задача 9. Докажите, что элемент α имеет вид

$$\alpha = [a_4, a_{n-1}] + b,$$

где $b \in \pi_{n+2}(S^{n-1})$, $[a, b]$ — произведение Уайтхеда (см. [1], ч. II, § 22), $a_4 \in \pi_4(S^4)$ и $a_{n-1} \in \pi_{n-1}(S^{n-1})$ — образующие. При $n = 5$, $b \in \pi_5(S^4) = \mathbb{Z} \oplus$ (конечная группа) лежит в конечной части.

Далее, мы знаем из § 10 (следствие теоремы Картана — Серра), что группа $\pi_{n+2}(S^{n-1})$ при $n \neq 5$ конечна. (Более того, в § 10 эта группа была вычислена для $n > 5$, где $\pi_{n+2}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}_{24}$). Итак, имеется не более конечного числа замкнутых многообразий E с точностью до гомотопического типа (при $n > 5$ их не более, чем 24). Эти многообразия имеют размерность $n \geq 6$. Что же касается диффеоморфизма, то класс $p_1(\xi)$ является инвариантом многообразия E , поскольку $p_1(E) = p^*p_1(\xi)$ (проверьте!).

Итак, уже класс p_1 гомотопически неинвариантен для многообразий размерности ≥ 6 . Для многообразий M^4 этот класс гомотопически инвариантен в силу формулы (см. выше)

$$p_1 = 3\tau[M^4].$$

Рассмотрим случай $n = 5$. Базисный цикл $x \in H_4(M^5; \mathbb{Z})$ может быть в соответствии со следствием 1 из п. II представлен в виде ориентируемого подмногообразия, локально разделяющего ориен-

тируемое многообразие M^5 на две части (но глобально не разделяющего). Рассмотрим минимальное накрытие

$$\widehat{M}^5 \xrightarrow{\rho} M^5$$

такое, что $(\rho_* \pi_1(\widehat{M}^5), D x) = 0$, и эта формула определяет накрытие гомотопически инвариантно. Геометрически это накрытие строится так: многообразие M^5 разрезается вдоль M^4 ; получается пленка W^5 такая, что

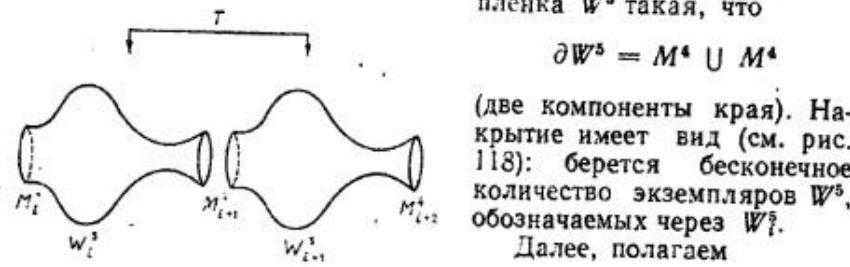


Рис. 118.

$$\partial W^5 = M^4 \cup M^4$$

(две компоненты края). Накрытие имеет вид (см. рис. 118): берется бесконечное количество экземпляров W^5 , обозначаемых через W_i^5 . Далее, полагаем

$$\widehat{M}^5 = \dots \cup_{M_1^4}^{M_l^4} W_1^5 \cup_{M_{l+1}^4}^{M_2^4} W_2^5 \cup_{M_3^4}^{M_4^4} W_3^5 \dots$$

Группа монодромии накрытия равна \mathbb{Z} и действует так:

$$T(W_i^5) = W_{i+1}^5,$$

$$T(W_1^5) = M_{l+1}^4, \quad \partial W_0^5 = M_0^4 \cup M_1^4.$$

Вложение $M^4 \rightarrow \widehat{M}^5$ обозначим через i . Мы имеем цикл $\hat{x} = i_*[M^4] \in H_4(\widehat{M}^5)$. Очевидно, мы имеем $T_* \hat{x} = \hat{x}$. Пусть $a, b \in H^2(\widehat{M}^5; \mathbb{Q})$. Введем форму

$$\langle a, b \rangle_{\hat{x}} = \langle ab, \hat{x} \rangle.$$

Лемма 6. Форма $\langle a, b \rangle_{\hat{x}}$ сосредоточена на некотором конечномерном подпространстве $A \subset H^2(\widehat{M}^5)$; это означает, что $H_1^2(\widehat{M}^5) = A + B$ и $\langle B, b \rangle_{\hat{x}} = 0$ для любого $b \in H^2(\widehat{M}^5)$.

Доказательство немедленно следует из компактности многообразия M^4 (цикла \hat{x}), так как $\langle ab, \hat{x} \rangle = ((i^* a)(i^* b), [M^4])$.

Определение 4. Сигнатура формы $\langle a, b \rangle_{\hat{x}}$ на конечномерном пространстве A называется сигнатурой цикла $\tau(\hat{x})$.

Теорема 4 (Новиков). Имеет место формула

$$(p_1(M^5), x) = 3\tau(\hat{x}).$$

Следствие. Класс $p_1(M^5) \in H^4(M^5; \mathbb{Q})$ гомотопически инвариантен.

Доказательство теоремы. Цикл $M^4 \subset \widehat{M}^5$ делит на две части $\widehat{M}^5 = M_1 \cup M_2$. Имеем два вложения: $i_1: M^4 \rightarrow M_1$, $i_2: M^4 \rightarrow M_2$. Сигнатура цикла $\tau(\hat{x})$ совпадает с сигнатурой формы на $H^2(M^4; \mathbb{Q})$, ограниченной на подпространство $\text{Im } i_1^*$, поскольку $\langle ab, x \rangle = 0$, если $i_1^* a = 0$ или $i_2^* b = 0$. Очевидно, мы имеем

$$\text{Im } i^* = \text{Im } i_1^* \cap \text{Im } i_2^*.$$

В гомологиях $H_2(M^4; \mathbb{Q})$ имеются следующие подгруппы:

$$L_0 = \text{Ker } i_1^*, \quad L_1 = \text{Ker } i_1 = L_0 + N_1,$$

$$L_2 = \text{Ker } i_2^* = L_0 + N_2,$$

$$L_3 = \text{Im } i_1^* \subset H_2(\widehat{M}^5; \mathbb{Q}).$$

Индекс пересечения обращается в нуль на подпространствах L_1 и L_2 (циклы, гомологичные нулю в пленке, имеют нулевое пересечение). Поэтому в базисе

$$H_2(M^4; \mathbb{Q}) = (L_0, N_1, N_2, L_3)$$

форма имеет матрицу вида (блочную):

$$\begin{array}{c|cccc} & L_0 & N_1 & N_2 & L_3 \\ \hline L_0 & 0 & 0 & 0 & X \\ N_1 & 0 & 0 & Q & Y \\ N_2 & 0 & Q^* & 0 & Z \\ L_3 & X^* & Y^* & Z^* & W \end{array}$$

где $W = W^*$. Сигнатура такой формы совпадает с сигнатурой формы на подпространстве L_3 (т. е. для матрицы W).

Далее, сигнатуре формы на подпространстве $L_3 \subset H_2(M^4; \mathbb{Q})$ совпадает с сигнатурой формы $\langle ab, [M^4] \rangle$ на подпространстве $\text{Im } i^*(H^2(M^5))$ и тем самым совпадает с сигнатурой $\tau(\hat{x})$. Теорема доказана.

Таким образом, в неодносвязных замкнутых многообразиях между рациональными характеристическими классами и фундаментальной группой возникает глубокая связь, исследование которой к настоящему времени далеко не является завершенным. Наиболее общая «гипотеза о высших сигнатурах» состоит в следующем: имеется запас классов когомологий, связанных с фундаментальной группой $\pi_1(M^n) = \pi$; этот класс получается как образ $\text{Im } j^*$, где $j: M^n \rightarrow K(\pi, 1)$ — каноническое отображение. Если $x \in H^{n-4k}(\pi, \mathbb{Q})^*$, то предполагается, что скалярное произведение полинома Хирцбруха от характеристических классов Понtryгина с циклом $Dj^*(x)$ гомотопически инвариантно:

* В алгебре когомологии комплекса $K(\pi, 1)$ называются когомологиями группы π и обозначаются через $H^*(\pi, \mathbb{Q})$.

$(L_k(p_1, \dots, p_k), D j^*(x))$, где D — двойственность Пуанкаре. Для свободных абелевых групп — т. е. если x есть произведение одномерных классов — эта гипотеза доказана (Новиков, Роглин, Каспаров, Чанг, Фарелл). Она доказана также, когда π есть фундаментальная группа компактного риманова многообразия отрицательной кривизны (Люстиг, Мищенко), а также в ряде случаев или алгебраическим образом сводящихся к этим, или в некотором смысле аналогичных этим (Кеппелл, Соловьев). Никаких других гомотопических инвариантов замкнутых многообразий из рациональных (вещественных) характеристических классов — т. е. из тензора кривизны — составить невозможно.

§ 28. Гладкие структуры на семимерной сфере. Проблема классификации гладких многообразий (нормальные инварианты). Кручение Райдемайстера и основная гипотеза комбинаторной топологии

Мы рассматриваем бесконечно дифференцируемые многообразия. Известно, что многообразие класса гладкости $k \geq 1$ эквивалентно (и при этом единственному) бесконечно дифференцируемому и даже вещественно аналитическому многообразию (Уитни). Формально можно определить также чисто непрерывные многообразия, где замены координат при переходе от одной координатной карты к другой негладки. Можно рассматривать также (что встречается гораздо чаще) чисто непрерывные гомеоморфизмы гладких многообразий. До 50-х годов считалось «ясным», что на любом непрерывном многообразии можно ввести структуру гладкого многообразия и что два непрерывно гомеоморфных гладких многообразия на самом деле также диффеоморфны. Это очевидно для $n = 1$, без труда доказывается для $n = 2$; с большими затруднениями, но прямыми элементарными методами эти факты удается установить для трехмерных многообразий (Мойс).

Одно из самых удивительных следствий изложенного выше аппарата алгебраической топологии состоит в обнаружении среди довольно простых многообразий такого, которое непрерывно гомеоморфно обычной семимерной гладкой сфере S^7 , но не диффеоморфно сфере S^7 (Милнор). Как будет видно далее, этот эффект приводит к открытию многообразий, не допускающих введения никакой структуры дифференцируемого многообразия.

Напомним, что с помощью кватернионов (см. [1], ч. II, § 24) мы строили «кватернионное расслоение Хопфа»

$$S^7 \xrightarrow{p} S^4, \text{ слой } F = S^3.$$

Это — главное расслоение с группой $S^3 = SU(2)$, состоящей из кватернионов q , $|q| = 1$, действующих так на сфере

$$S^7 = \{(q_1, q_2), |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\}, \quad (q_1, q_2) \mapsto (qq_1, qq_2).$$

где q_1, q_2, q — кватернионы. Так как $SU(2) \subset SO(4) = SU(2) \times \times (SU(2)/(-1, 1))$, то можно говорить о классах (χ, p_1) . Мы будем изучать аналогичные расслоения с группой $SO(4)$. Такие расслоения мы будем реализовывать как расслоения со слоем D^4 и базой S^4 :

$$E \xrightarrow{p} S^4, \quad F = D^4, \quad G = SO(4). \quad (1)$$

Число χ равно, по определению, индексу самопересечения $S^4 \circ S^4$, где $S^4 \subset E$ как нулевое сечение (см. [1], ч. II, § 24). (Точнее, χ — класс когомологий базы S^4 , $\chi \in H^4(S^4; \mathbb{Z})$ такой, что $(\chi, [S^4]) = S^4 \circ S^4$).

Лемма 1. Пространство ∂E расслоения (1) со слоем S^3 гомеоморфно сфере S^7 тогда и только тогда, когда $\chi = 1$.

Докажем, что ∂E имеет гомотопический тип сферы S^7 тогда и только тогда, когда $\chi = 1$. Рассмотрим точную последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_i(\partial E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(S^4) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(S^3) \rightarrow \dots$$

Для $i = 4$ гомоморфизм $\partial: \pi_4(S^4) \rightarrow \pi_3(S^3)$ вычисляется так: будем строить ненулевое сечение расслоения (1) со слоем D^4 . Теперь ясно, что индекс самопересечения $S^4 \circ S^4$ совпадает с кратностью, с которой цикл S^3 (слой) входит в границу $\partial[\sigma^4]$ в ∂E . Итак, $\partial[S^4] = \chi[S^3]$ (см. [1], ч. II, § 22). Если $\chi \neq 1$, то мы имеем

$$0 \rightarrow Z_\chi \rightarrow \pi_3(\partial E) \rightarrow \pi_3(S^4).$$

Поэтому $\pi_3(\partial E) = Z_\chi$. Если $\chi = 1$, то $\pi_j(\partial E) = 0$ при $j < 4$, как следует из точной последовательности. Так как ∂E имеет только клетки $\sigma^0, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^7$ и $\pi_j = 0$ при $j < 4$, то на самом деле мы имеем

$$H_j(\partial E) = \pi_j(\partial E) = 0, \quad j < 7, \quad \pi_7(\partial E) = Z.$$

Базисный элемент $\alpha \in \pi_7(\partial E) = Z$ представляется отображением $\alpha: S^7 \rightarrow \partial E$, которое индуцирует изоморфизм групп гомологий (и, следовательно, гомотопических групп). Итак, $\partial E \sim S^7$.

Имеется общая теорема (Смейл, Столлингс, Уоллес), что при $n \geq 5$ многообразие гомотопического типа S^n гомеоморфно S^n . Из этого, конечно, следует лемма 1. Можно, не используя этой теоремы, конкретно построить некоторые из расслоений через кватернионы и напрямик указать гомеоморфизм $\partial E \approx S^7$, явно предъявив функцию Морса, которая имеет только один минимум и один максимум (см. ниже). При фиксированном $\chi = 1$ мы имеем расслоения с различными классами p_1 .

Лемма 2. Для любого k существует расслоение ξ такое, что $p_1 = 2k$, $\chi = 1$ (точнее, $p_1 = 2ku$, $\chi = u$, где $u \in H^4(S^4; \mathbb{Z})$ — базисный элемент).

Перед доказательством леммы 2 мы продемонстрируем механизм, приводящий к возникновению нетривиальных гладких структур на сфере S^7 .

Рассмотрим класс $p_1(E) = p^*p_1(\xi)$, так как $\tau_E = \tau_{S^4} \oplus p^*(\xi)$. Поэтому

$$p_1(E) = p^*p_1(\xi) = 2kp^*u = 2kv,$$

где $v = p^*u \in H^4(E; \mathbb{Z})$ — базисный элемент. Для цикла $S^4 \subset E$ мы имеем

$$S^4 \circ S^4 = 1 = (\chi, [S^4]).$$

Поэтому сигнатурра $\tau(E) = 1$.

Рассуждение от противного: если край ∂E — обычная сфера $S^7 = \partial D^8$ (как гладкое многообразие), то мы имеем гладкое многообразие

$$\bar{E}^8 = E \cup D^8, \text{ где } \partial E = \partial D^8.$$

Далее, $H_i(\bar{E}^8) = H_i(E)$ при $i < 7$,

$$p_1(\bar{E}^8) = p_1(E) = 2kv,$$

$$\tau(E) = 1 = \tau(\bar{E}^8).$$

Для замкнутого гладкого многообразия \bar{E}^8 гомотопического типа HP^2 (кватернионной проективной плоскости) мы можем применить формулу сигнатуры (см. § 24):

$$p_2 = \frac{1}{7}(45\tau + p_1^2).$$

При этом число $(p_2, [\bar{E}^8])$ должно быть целым! В нашем случае

$$\tau = 1, \quad p_1^2 = 4k^2,$$

$$p_2 = \frac{4k^2 + 45}{7}.$$

Для $k = 1$ мы имеем: $p_2 = 7$ для обычной кватернионной проективной плоскости HP^2 . Для $k = 0, 2, 3, 4, \dots$ и т. д. имеем: p_2 — число не целое! Противоречие с гладкостью \bar{E}^8 .

Вывод. При всех k , когда p_2 —дробно, многообразие ∂E не диффеоморфно сфере S^7 (хотя и гомеоморфно S^7).

Известно, что классы $p_q \in H^{4q}(M^n; \mathbb{Q})$ — инварианты непрерывных гомеоморфизмов (Новиков). Отсюда, конечно, следует, что многообразие \bar{E}^8 при $k = 0, 2$ не допускает введения гладкой структуры. Действительно, наличие гладкой структуры для \bar{E}^8 противоречило бы инвариантности класса $p_1(E)$, так как т., очевидно, инвариантно. Впрочем, детальный анализ показывает, что для некоторых других примеров можно обойтись и более простыми средствами, чем использование топологической инвариантности классов p_q (Кервер).

Обратимся теперь к доказательству леммы 2.

Рассмотрим сначала $SO(3)$ — расслоение над S^4 . Так как $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$, мы имеем отображение (превращенное в расслоение)

$$BSO(3) \xrightarrow{\rho} K(\mathbb{Z}_2, 2); \quad F = BSU(2),$$

причем $\pi_1(B) = 0$. Спектральная последовательность в \mathbb{Z} -гомологиях имеет вид $E_{p,q}^2 = H_p(B; \mathbb{Z}_2), \quad H_q(F) = E_{p+q}^\infty, \quad p+q < 5$:

4	u	0	u_1	0	u_2	u_3
	0	0	0	0	0	0
0	1	0	v	0	w	x
	0	1	2	3	4	5

$d_5 x = 0$, так как $2u \neq 0, 2x = 0$, откуда следует, что $\pi_4(BSO(3)) \xrightarrow{H} H_4(BSO(3); \mathbb{Z}_2)$ не есть отображение «на», $\text{Coker } H = \mathbb{Z}_2$. Класс $p_1 \in H^4(BSO(3), \mathbb{Q})$ таков, что

$$(p_1, u) = 2,$$

где u — базисный элемент группы $H\pi_4 \subset H_4(BSO(3); \mathbb{Z})$. Таким образом, для $G = SO(3)$ число $(p_1, [S^4])$ пробегает все четные значения для расслоений ξ над S^4 .

Вкладывая $SO(3)$ в $SO(4)$, мы переходим от $\xi \leftarrow \xi \oplus 1$, где $p_1(\xi \oplus 1) = p_1(\xi)$, $\chi(\xi \oplus 1) = 0$.

Рассмотрим теперь $SO(4) = (SU(2) \times SU(2))/(-1, -1)$ и отображение (расслоение)

$$BSO(4) \xrightarrow{\rho} K(\mathbb{Z}_2, 2), \quad F = BSU(2) \times BSU(2).$$

В спектральной последовательности для Z -гомологий, учитывая, что $\pi_1(B) = 0$, имеем:

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F)) = E_{p,q}^\infty, \quad p+q < 5,$$

4	u	0	u_1	0	u_2	
y		x_1		x_2		
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	v	0	w	x
	0	1	2	3	4	5

Здесь $2x = 2v = 2w = 0$, $d_5x = 0$, так как $2u \neq 0$, $2y \neq 0$. Отображение $H: \pi_4(BSO(4)) \rightarrow H_4(BSO(4); Z)$ не является изоморфизмом $\text{Coker } H = Z_2$.

Вывод. Так как p_1, χ — базис в сопряженном пространстве $\text{Hom}(H_4, Z)$, то χ может принимать любые целые значения для расслоений над S^4 , а p_1 четные.

Лемма доказана.

Прямое построение расслоений (Милнор). Вспомним (см. [1], ч. II, § 24), что $SO(4)$ -расслоения над сферой «нумеруются» элементами группы $\pi_3(SO(4)) = Z + Z$, т. е. парами целых чисел (h, j) . Явная конструкция соответствующих отображений $f_{h,j}: S^3 \rightarrow SO(4)$ дается через кватернионы:

$$f_{h,j}(u)v = u^h v u^j,$$

где $u, v \in \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, $|u| = 1$ (т. е. $u \in S^3$). Через $\xi_{h,j}$ обозначим соответствующее расслоение над S^4 .

Задача 1. Докажите, что

$$\chi(\xi_{h,j}) = h + j, \quad p_1(\xi_{h,j}) = \pm 2(h - j).$$

Пусть числа h и j такие, что $h + j = 1$, $h - j = k$. Обозначим через M_k^l пространство расслоения $\xi_{h,j}$ (где в слое — сфера S^3). Это многообразие может быть склеено из двух экземпляров $\mathbb{R}^4 \times S^3$ склейкой подмножеств $(\mathbb{R}^4 \setminus 0) \times S^3$ по диффеоморфизму

$$(u, v) \mapsto (u', v') = \left(\frac{u}{|u|^2}, -\frac{u^h v u^j}{|u|^2} \right)$$

(проверьте!).

Задача 2. Проверьте, что функция f вида

$$f(u, v) = \frac{\operatorname{Re} v}{(1 + |u|^2)^{1/2}} = \frac{\operatorname{Re} u^*}{(1 + |u^*|^2)^{1/2}},$$

где $u^* = u' (v')^{-1}$ имеет на M_k^l ровно 2 критические точки $(u, v) = (0, \pm 1)$, и они невырождены.

Отсюда вытекает, что все многообразия M_k^l гомеоморфны сфере S^7 . Из задачи 1 и рассуждений этого параграфа (выше) следует, что при $k^2 \not\equiv 1 \pmod{7}$ многообразие M_k^l не диффеоморфно S^7 .

Итак, мы видим, что бывают нетривиальные многообразия гомотопического типа сферы («гомотопические сферы»). Совокупность многообразий гомотопического типа S^n замкнуто относительно операции «связной суммы» многообразий (см. § 4):

$$M_1^n \# M_2^n \sim S^n.$$

Определение 1. Два замкнутых многообразия M_1^n и M_2^n (любого гомотопического типа) называются *h-кобордантными* (или *J-эквивалентными*), если найдется пленка W^{n+1} , $\partial W^{n+1} = M_1^n \cup M_2^n$, причем пленка W^{n+1} стягивается к каждому из своих краев.

Лемма 3. Классы *h-кобордизма гомотопических сфер* образуют группу Θ^n .

Доказательство: ассоциативность связной суммы верна всегда (не только для гомотопических сфер); рассмотрим сумму ориентированной гомотопической сферы M_+^n и ее же с противоположной ориентацией $(M_+^n) \# (M_+^n) = M_0^n$. Многообразие M_0^n — граница следующего многообразия W^{n+1} (см. рис. 119).

Из произведения $M_+^n \times I(0, 1)$ удалено произведение $D_e^n \times I$, где $D_e^n \subset M_+^n$ — малый открытый шар радиуса e . Сгладив углы, заметим, что $\partial W^{n+1} = M_+^n \# M_+^n$, и W^{n+1} стягивается.

Удалив из W^{n+1} малый открытый шар D_e^n , получим *h-кобордизм* между ∂W^{n+1} и обычной сферой S^n .

Лемма доказана.

Введем следующие обозначения: ∂P^{n+1} — подгруппа в Θ^n , состоящая из границ параллелизуемых $(n+1)$ -мерных многообразий; $J_n \subset \pi_{N+n}(S^n)$, $n < N-1$ — подгруппа, состоящая из оснащений на обычной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{N+n}$ (см. [1], ч. II, § 23). Имеет место такой факт:

Любая гомотопическая сфера M^n при вложении в \mathbb{R}^{N+n} имеет тривиальное нормальное расслоение (для $n = 4k$ это следует из периодичности Ботта — см. § 22, и формулы сигнатуры для p_k , учитывая, что $\tau(S^n) = 0$; для $n \neq 4k, 8k+1, 8k+2$ это следствие того, что гомотопические группы $\pi_n(SO) = 0$; при $n = 8k+1, 8k+2$ это — теорема Адамса, вытекающая из более современной техники алгебраической топологии).

Поэтому, учитывая произвол в выборе оснащения на $M^n \subset \mathbb{R}^{N+n}$, мы получаем гомоморфизм $\Theta^n \rightarrow \pi_{N+n}(S^n)/J^n$. Ядро этого гомоморфизма есть группа ∂P^{n+1} (проверьте!).

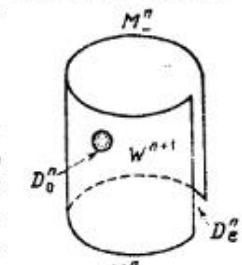


Рис. 119.

Для группы ∂P^{n+1} имеются следующие результаты:

а) $\partial P^{n+1} = 0$, если n четно,

$$\text{б) } \partial P^{n+1} = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \\ Z_2, & n = 10, \\ 0 \text{ или } Z_2, & \text{если } n = 4k + 1, \end{cases}$$

в) ∂P^{n+1} равна циклической группе некоторого конечного порядка, равного 28 для $n = 7$ (в сущности, мы уже построили выше нетривиальный гомоморфизм $\theta^7 \rightarrow Z_2$). Особый случай $n = 3$ не рассматривается. Группы $\Gamma_n = \pi_{n+n}(S^n)/J^n$ и θ^n имеют вид:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Gamma_n =$	0	0	Z_2	0	0	0	0	0	Z_2	$(Z_2)^2$	Z_2
$\theta^n =$	0	0	0	?	0	0	0	Z_{28}	$(Z_2)^2$	$(Z_2)^3$	Z_2

Таковы факты (Милнор, Кервер) о группах гомотопических сфер θ^n . Имеет место теорема (Смейл): для односвязных многообразий размерности $n \geq 5$ любой h -кобордизм W^{n+1} тривиален $W^{n+1} = M^n \times I$. Поэтому группы θ^n дают классификацию гладких структур на сферах, исключая размерности $n = 3, 4$.

Гладкие структуры на сфере и классификации многообразий гомотопического типа сферы — это одна и та же задача при $n \neq 3, 4$. Группа θ^3 неизвестна, но нетривиальных гладких структур на S^3 нет. Группа $\theta^4 = 0$ известна, но неизвестно, имеются ли нетривиальные гладкости на S^4 .

Изложим теперь классификационную теорию гладких замкнутых односвязных многообразий размерности $n \geq 5$ (Новиков, Браудер) *). Естественно возникает вопрос: какими инвариантами, кроме гомотопического типа и класса эквивалентности касательного расслоения, определяется гладкое замкнутое многообразие? Для частного случая гомотопических сфер мы указали теорию (Милнора — Кервера), решающую эту задачу. Подход к этой задаче для общих многообразий таков: будем работать со стабильным нормальным расслоением v^n при вложении $M^n \subset \mathbb{R}^{n+N}$, которое однозначно определяется касательным расслоением τ^n при $N > n + 1$ в силу равенства

$$\tau^n \oplus v^n \sim 0.$$

*). Для $n = 4$ из этой теории вытекает только утверждение, что гомотопически эквивалентные многообразия являются h -кобордантными.

Гладкие многообразия любого несферического гомотопического типа, разумеется, не образуют никакой группы. Оказывается чрезвычайно полезным рассмотрение комплекса Тома $M(v^N)$. Имеется естественное вложение $M^n \subset M(v^N)$ и отображение целой окрестности U многообразия M^n в $\mathbb{R}^{n+N} \subset S^{n+N}$:

$$U \rightarrow M(v^N),$$

где ∂U переходит в одну точку. Окрестность U — это и есть пространство расслоения v^N . Отображение пар $(U, \partial U) \rightarrow (M(v^N), *)$ продолжается естественным образом до отображения сферы, переводя дополнение к области U в сферу S^{n+N} в точку *:

$$\psi = \psi_{M^n}: S^{n+N} \rightarrow M(v^N).$$

Для отображения $\psi = \psi_{M^n}$ имеем

$$\psi_*[S^{n+N}] = \varphi[M^n] \subset H_{n+N}(M(v^N)).$$

Итак, цикл $\alpha [M^n]$ сферический. Далее, группа $H_{n+N}(M(v^N); \mathbb{Z})$ равна \mathbb{Z} , $n < N + 1$. В качестве следствия результатов § 10 мы имеем:

$$\pi_{n+N}(M(v^N)) = \mathbb{Z} + D,$$

где D — конечная абелева группа.

Многообразию M^n в силу этой конструкции отвечает элемент $\psi_{M^n} \in \pi_{n+N}(M(v^N))$ такой, что $\psi_*[S^{n+N}] = \varphi[M^n]$. Поэтому $\psi_{M^n} = 1 + \alpha$, $\alpha \in D$. Имеет место следующее

Утверждение 1. (Новиков). а) Каждому многообразию M_1^n , для которого задана сохраняющая нормальное расслоение и ориентацию гомотопическая эквивалентность $M_1^n \xrightarrow{f} M^n$ ($\deg f = +1$, $f^*v_{M^n}^N = v_{M_1^n}^N$), отвечает элемент $\psi_{M_1^n} \in \pi_{n+N}(M(v^N))$ вида $1 + \alpha$, $\alpha \in D$ (хотя, вообще говоря, и не один). Для $n \neq 4k + 2$ верно и обратное утверждение. Для $n = 4k + 2$ «реализуемые» элементы $1 + \alpha$ могут пробегать подгруппу $\alpha \in \tilde{D} \subset D$, где либо $\tilde{D} = D$, либо \tilde{D} имеет индекс 2.

б) Если два таких многообразия M_1^n и M_2^n попали в один класс $1 + \alpha \in \pi_{n+N}(M(v^N))$, то найдется сфера Милнора $\theta \in \partial P^{n+1}$ такая, что $M_1^n \# \theta = M_2^n$.

Следствие. При фиксированном гомотопическом типе и касательном расслоении (или его инвариантах — классах $r_k \in H^*(M^n; \mathbb{Q})$) может быть только конечное число попарно недиффеоморфных гладких односвязных многообразий размерности $n \geq 5$ (все построенные инварианты диффеоморфизма принимают значение в конечных абелевых группах).

Другая теорема (Браудер, Новиков) показывает, какие векторные расслоения ξ над гладким многообразием M_1^n могут быть

реализованы как нормальные расслоения $M_2^n \subset \mathbb{R}^{n+N}$ какого-то другого многообразия M_2^n гомотопического типа M_1^n :

а) Для этого необходимо, а при $n = 6, 14$ и всех нечетных $n = 2k + 1 \geq 5$ и достаточно, чтобы цикл $\varphi [M_1^n] \in H_{n+n}(M(\xi))$ был сферическим (образом сферы S^{n+n}).

б) При $n = 4k$ для достаточности надо добавить условие, чтобы полином Хирцебруха от классов $p_1(\xi), \dots, p_k(\xi)$ совпадал с сигнатурой $\tau[M_1^n]$. Необходимость этого условия очевидна — см. выше формулу сигнатуры.

Эта теорема, на самом деле, может быть сформулирована более общим образом (Браудер): можно предполагать, что M_2^n — это не многообразие, а только комплекс, в целочисленных когомологиях которого (не локальных, а только глобальных) имеется двойственность Пуанкаре. Спрашивается — когда комплекс M_1^n имеет гомотопический тип гладкого замкнутого многообразия M_2^n ? Для этого необходимо и достаточно, чтобы нашлось стабильное расслоение ξ над M_1^n , где цикл $\varphi(M_1^n)$ — сферический и выполнены условия а) и б).

При $n = 4k + 2$ варианты всех этих теорем также правильны, но они более сложно формулируются; мы их не приводим здесь.

Задача 3. Докажите, что для случая сферы $M^n = S^n$ мы имеем:

$$\begin{aligned} M(v^N) &= S^N \vee S^{N+n}, \\ \pi_{N+n}(M(v^N)) &= Z + \pi_{N+n}(S^n), \\ \text{т. е. } D &= \pi_{N+n}(S^n). \end{aligned}$$

Для вычисления степени неоднозначности этого «нормального инварианта» $\Psi_{M^n} \in \pi_{N+n}(M(v^N))$ нужно рассмотреть группу гомотопических классов отображений нормального расслоения, имеющих степень $+1$ на базе:

$$M^n \xrightarrow{f} M^n, \quad v^N \xrightarrow{\tilde{f}} v^N.$$

Эта группа действует на комплексе Тома $M(v^N)$, орбиты действия на допустимых элементах вида $1 + \alpha$ из $\pi_{N+n}(M(v^N))$ точно соответствуют многообразиям с точностью до прибавления сфер Милнора из подгруппы ∂P^{n+1} : $M_i^n \rightarrow M_i^n \# \partial P^{n+1}$.

Задача 4. Докажите, что для $M^n = S^n$ степень неоднозначности сводится к факторизации $\pi_{N+n}(S^n)/J^n$. Вычислите группу гомотопических классов автоморфизмов многообразия с нормальным расслоением для M^4 , $\pi_1(M^4) = 0$; покажите, что она транзитивно действует на множестве элементов вида $1 + \alpha$. Вычислите эти группы для $\mathbb{C}P^n$ и $S^k \times S^l$.

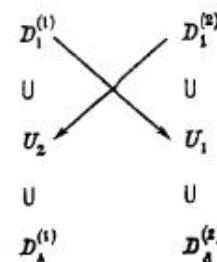
Обратим внимание на такое весьма любопытное (и элементарно устанавливаемое) свойство гомотопических эквивалентностей, сохраняющих стабильное нормальное расслоение.

Теорема 1 (Мазур). Если $f: M_1^n \rightarrow M_2^n$ гомотопическая эквивалентность такая, что $f^*v_2^N = v_1^N$, то пространства E_1 и E_2 , расслоений v_2^N и v_1^N со слоем \mathbb{R}^N диффеоморфны (односвязность здесь не предполагается), $N > n + 2$.

Доказательство. Рассмотрим аппроксимацию отображения $f: M_1^n \rightarrow M_2^n \subset E_2$ с помощью гладкого вложения $\tilde{f}: M_1^n \subset E_2$ и аппроксимацию $\tilde{g}: M_2^n \subset E_1$ «обратного» отображения $g: M_2^n \rightarrow M_1^n \subset E_1$, где $fg \sim 1$ и $gf \sim 1$. Считаем, что $N > n + 1$. Нормальные расслоения к образам $\tilde{f}(M_1^n) \subset E_2$ и $\tilde{g}(M_2^n) \subset E_1$ есть v_2^N и v_1^N по условию. Поэтому имеется диффеоморфизм областей $D_1^{(2)}$ и $D_2^{(1)}$, образованных векторами длины < 1 в обоих расслоениях E_2 , E_1 на ϵ -окрестности U_1 и U_2 вложений $\tilde{f}(M_1^n) \subset E_2$ и $\tilde{g}(M_2^n) \subset E_1$:

$$D_1^{(1)} \xrightarrow{\tilde{F}} U_1 \subset E_2, \quad D_2^{(2)} \xrightarrow{\tilde{G}} U_2 \subset E_1.$$

Заметим следующее: $U_1 \subset D_1^{(2)}$, $U_2 \subset D_2^{(1)}$. Определены отображения: $\tilde{G}\tilde{F}: D_1^{(1)} \rightarrow D_2^{(1)}$, $\tilde{F}\tilde{G}: D_2^{(2)} \rightarrow D_1^{(2)}$. Можно считать, что окрестность U_1 содержит M_2^n и окрестность U_2 содержит M_1^n вместе с их δ -окрестностями $D_\delta^{(2)}$ и $D_\delta^{(1)}$ соответственно при достаточно малых δ . В самом деле, обратим внимание, что окрестность U_2 содержит диффеоморфный образ $\tilde{G}\tilde{F}(D_1^{(1)})$. При этом образ нулевого сечения гомотопен ему самому. Поэтому диффеоморфизмом всего многообразия E_1 , неподвижным для всех векторов длины $\geq 1/2$ и изотопным тождественному, этот образ можно совместить с окрестностью нулевого сечения (см. [1], ч. II, § 10). Здесь существенную роль играет условие стабильности $N > n + 2$, позволяющее применить теорему Уитни. (Впрочем, читатель легко увидит, что это утверждение вытекает из сформулированной выше теоремы Смейла в односвязном случае. Однако мы приводим доказательство теоремы Мазура и для неодносвязных многообразий.) Мы имеем диаграмму диффеоморфизмов и вложений



Однако $D_\delta^{(1)}$ каноническим растяжением $E_i \xrightarrow{\delta^{-1}} E_i$ в δ^{-1} раз диффеоморфно $D_\delta^{(1)}$, причем размер U_i также увеличивается в δ^{-1} раз. Мы получаем, итерируя растяжение многократно:

$$\begin{array}{ccccccc} D_\delta^{(1)} & = & U_1 & = & D_\delta^{(1)} & = & U_{1,\delta^{-1}} \\ & & \searrow F_\delta^{(1)} & & \searrow F_{\delta^{-1}}^{(1)} & & \searrow F_{\delta^{-2}}^{(1)} \\ & & \tilde{\delta}^{-1} & & \tilde{\delta}_{\delta^{-1}}^{-1} & & \tilde{\delta}_{\delta^{-2}}^{-1} \\ D_\delta^{(2)} & = & U_1 & = & D_\delta^{(2)} & = & U_{1,\delta^{-1}} = D_\delta^{(2)} = U_{1,\delta^{-2}} = D_\delta^{(2)} = \dots \end{array}$$

Так как $\bigcup_i U_{1,\delta^{-i}} = E_1 = \bigcup_i D_{\delta^{-i}}$, то распухающая последовательность диффеоморфизмов $\tilde{F}_{\delta^{-i}}^{(1)}: U_{1,\delta^{-i}} \rightarrow D_{\delta^{-i}}^{(2)}$ в пределе дает диффеоморфизм $E_1 \rightarrow E_2$. Теорема доказана.

Следствие 1. Комплексы Тома расслоений v_1^N, v_2^N над многообразиями M_1^n и M_2^n непрерывно гомеоморфны:

$$M(v_1^N) \approx M(v_2^N).$$

Доказательство очевидно.

Задача 5. Если $n = 3$, то все ориентируемые многообразия параллелизуемы (докажите!).

Следствие 2. Линзовидные многообразия $L_p^3(q_j)$ ($j = 1, 2$), если они гомотопически эквивалентны (т. е. $q_1 = \lambda^2 q_2$, где q_1, q_2, λ — ненулевые вычеты modulo p , p простое) имеют диффеоморфные прямые произведения на \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ (см. § 11) $\mathbb{R}^6 \times L_p^3(q_1) = L_p^3(q_2) \times \mathbb{R}^6$, $q_1 = \lambda^2 q_2$.

Комплексы Тома тривиальных расслоений $M(v_1)$ и $M(v_2)$ гомеоморфны.

Важный факт (Милнор): в комплексе Тома $M(v)$ имеется особая точка $(*) \subset M(v)$, которая комбинаторно устроена (при симплексиальном разбиении) как конус над границей «звезды» — пространством расслоения v , со слоем S^{n-1} ; комбинаторные инварианты границы звезды являются инвариантами самого комплекса. Если сфера S^{n-1} четна, и расслоение v — прямое произведение, то кручение Райдемайстера имеет вид

$$R(L_p^3(q) \times S^{n-1}) = R(L_p^3(q)) \times \chi(S^{n-1}),$$

где χ — эйлерова характеристика (проверьте!). В частности, возможна ситуация, например, для $p = 7$:

$$R(L_p^3(q_1)) \times \chi(S^{n-1}) \neq R(L_p^3(q_2)) \times \chi(S^{n-1}),$$

где $\chi(S^{n-1}) = 2$. Поэтому комплексы Тома $M(v_1)$ и $M(v_2)$ комбинаторно не эквивалентны, хотя и гомеоморфны.

ЛИТЕРАТУРА

- Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
- Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1956.
- Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.
- Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
- Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969.
- Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Л.: Гостехиздат, 1948.
- Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — М.: Наука, 1971.
- Норден А. П. Теория поверхностей. — М.: Гостехиздат, 1956.
- Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1952.
- Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981.
- Зейферт Т., Трельфаль В. Топология. — М.; Л.: ГОНТИ, 1938.
- Зейферт Т., Трельфаль В. Вариационное исчисление в целом. — М.: ИЛ, 1947.
- Милиор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.
- Милиор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. — М.: Мир, 1971.
- Милиор Дж. Теорема об h -кобордизме. — М.: Мир, 1969.
- Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. — М.: Наука, 1976.
- Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973.
- Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.
- Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. — М.: ИЛ, 1960.
- Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. — М.: ИЛ, 1960.
- Чжень Шэн-шэнь. Комплексные многообразия. — М.: ИЛ, 1961.
- Бишоп Р., Крингтен Р. Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.
- Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.
- Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
- Стинрод Н. Топология косых произведений. — М.: ИЛ, 1953.
- Розендорн Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1971.
- Новиков С. П., Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Задачи по геометрии. — М.: Изд. МГУ, 1978.
- Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.

С. П. НОВИКОВ

Приложение 1

АНАЛОГ ТЕОРИИ МОРСА ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ
НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СКОБОК ПУАССОНА

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие конечного или бесконечного числа измерений (например, какое-либо пространство путей, соединяющих две точки x_0 и x_1 гладкого многообразия W^m , или пространство замкнутых направленных кривых — гладких отображений окружности в W^m). На многообразии M зададим замкнутую 1-форму ω ; найдется (бесконечнолистное) накрытие $\hat{M} \xrightarrow{p} M$ такое, что форма $p^*\omega$ является дифференциалом функции (простейший пример — это $\omega = d\varphi$ на $R^2 \setminus 0 = M$, где \hat{M} — это риманова поверхность логарифма):

$$p^*\omega = dS. \quad (1)$$

Мы будем называть величину S «многозначной функцией» на многообразии M . В бесконечномерном случае мы будем предполагать, что в критических (стационарных) точках ($dS = 0$ или $\omega = 0$) функция S имеет второй дифференциал d^2S , обладающий конечным числом отрицательных квадратов («индекс Морса») и конечной степенью вырождения. Фактически мы будем рассматривать только случай, когда все критические точки либо невырождены, либо образуют невырожденные критические многообразия (см. § 3). Мы будем предполагать также, что величина S обладает корректно определенным «градиентным спуском», — т. е. на многообразии \hat{M} любое компактное множество при спуске по градиенту S либо повисает на критической точке, либо проходит последовательно все уровни функции S «вниз».

Задача — построить аналог теории Морса для оценки числа стационарных точек многозначной функции S (т. е. замкнутой 1-формы ω) любого индекса Морса i . Мы обозначим число стационарных точек с индексом Морса i через $m_i(S)$ или $m_i(\omega)$, $p^*\omega = dS$.

В группе $H_1(M, \mathbb{Z})$ можно выбрать такой базис $(\gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_N)$, что

$$\oint_{\gamma_j} \omega = \begin{cases} 0, & j \geq k+1, \\ \kappa_j \neq 0, & j \leq k, \end{cases} \quad (2)$$

причем все числа κ_j при $j = 1, \dots, k$ линейно независимы с рациональными (или целыми) коэффициентами. Число k — 1 называется «степенью иррациональности» формы ω . Группа монодромии минимального накрытия $p: \hat{M} \rightarrow M$, превращающего ω в дифференциал однозначной функции $dS = p^*\omega$, точно равна \mathbb{Z}^k — свободной абелевой группе с k образующими t_1, \dots, t_k , действующими как сдвиги на

$$t_j: \hat{M} \rightarrow \hat{M}.$$

Фактически показателем иррациональности является точка проективного пространства

$$\kappa = (\kappa_1 : \kappa_2 : \kappa_3 : \dots : \kappa_k) \in RP^{k-1}.$$

Особо простым и интересным случаем является $k = 1$, когда форма ω дает элемент целочисленной группы когомологий $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{Z})$. В этом случае величина $\exp\{2\pi i S\}$ является однозначной комплекснозначной функцией, по модулю равной единице, — т. е. отображением

$$f = \exp\{2\pi i S\}: M \rightarrow S^1. \quad (3)$$

Задача о построении аналога теории Морса для критических точек таких отображений, безусловно, выглядит как классическая, однако эта задача никогда не рассматривалась в литературе до самого последнего времени (до 1981 года).

Рассмотрим бесконечномерные примеры «многозначных функционалов», которые естественно приводят к поставленным выше задачам. Пусть W^m — риманово многообразие с полной метрикой $g_{ij}(x)$, на котором задана замкнутая 2-форма Ω , $d\Omega = 0$. Зададим покрытие $W^m = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ таким семейством областей, что

а) форма Ω точна на любом U_{α} :

$$\Omega|_{U_{\alpha}} = d\psi_{\alpha}. \quad (4)$$

б) для любого гладкого отображения γ отрезка I или окружности S^1 в W^m найдется такая область U_{α} , что γ целиком лежит в U_{α} .

Рассмотрим многообразие $M = \Omega(x_0, x_1, W^m)$ путей, соединяющих две точки, или $M = \Omega^+(W^m)$ замкнутых направленных кривых и покроем его областями $M = \bigcup_{\alpha} N_{\alpha}$, где N_{α} состоит из всех кривых $\gamma \subset U_{\alpha}$. Каждое пересечение $N_{\alpha} \cap N_{\beta}$ представляя-

ется в виде $N_\alpha \cap N_\beta = \bigcup N_{\alpha\beta}^{(q)}$, где q — номер класса гомологий кривой в $H_1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbb{R})$, замкнутой или с двумя концами x_0, x_1 . На каждом множестве N_α зададим однозначный функционал

$$S^{(\alpha)}\{\gamma\} = \int_{\gamma} (dl - \psi_\alpha). \quad (5)$$

Лемма 1. В пересечениях $N_{\alpha\beta}^{(q)}$ для каждого q разность функционалов $S^{(\alpha)}\{\gamma\} - S^{(\beta)}\{\gamma\}$ является константой.

Действительно, разность функционалов представляется в виде

$$S^{(\alpha)} - S^{(\beta)} = \int_{\gamma} (\psi_\beta - \psi_\alpha), \quad (6)$$

где $d\psi_\alpha = d\psi_\beta$. Поэтому для каждого класса гомологий q этот интеграл есть константа. Лемма доказана.

Тем самым набор функционалов $S^{(\alpha)}$ определяет «многозначный функционал» S такой, что δS есть глобально определенная 1-форма на бесконечномерном многообразии M .

Этот пример естественно обобщается: пусть задан какой-либо достаточно регулярный однозначный функционал $S_\alpha\{\gamma\}$ для гладких отображений $\gamma: V^l \rightarrow W^m$ двух полных римановых многообразий, пусть задана замкнутая $(l+1)$ -форма Ω на W^m , $d\Omega = 0$ и покрытие $W^m = \bigcup U_\alpha$ такое, что

a) $\Omega|_{U_\alpha} = d\psi_\alpha$.

б) Для любого γ найдется номер α такой, что образ γ лежит целиком в области U_α .

Полностью аналогично предыдущему на многообразии M всех отображений $V^l \rightarrow W^m$ («киральных полей») возникает «многозначный функционал» $S = S_\alpha + \int_{\gamma} \psi_\alpha$ (см. [4], § 5).

Вернемся к случаю $l = 1$, когда для полных римановых метрик g_{ij} на многообразии W^m и любой 2-формы Ω индексы Морса всех стационарных точек конечны, и поток градиентного спуска на \hat{M} корректно определен. Такая ситуация возникает для аналога так называемого «функционала Мопертюи—Ферма»: траектории движения заряженной частицы в потенциальном поле сил $u(x)$ и магнитном поле Ω на римановом многообразии W^m (здесь $m = 2$ или 3) при фиксированной энергии E определяются как экстремумы функционала

$$\tilde{S}\{\gamma\} = \int_{\gamma} (dI_E - A_j dx^j), \quad (7)$$

где

$$(dI_E)^2 = 2m(E - u(x)) g_{ij} dx^i dx^j, \quad (8)$$

$$d(A_j dx^j) = \Omega$$

(см. [1], ч. I, § 33). Магнитное поле Ω считается здесь точной 2-формой. Для неточных 2-форм Ω мы приходим к многозначным функционалам. Требование полноты метрики I_B мы всегда будем предполагать выполненным в дальнейшем. На компактном многообразии W^m это эквивалентно условию

$$E > \max_{W^m} u(x). \quad (9)$$

Для неодносвязных многообразий W^m (например, для тора $W^m = T^m$) возможна такая ситуация: несмотря на все предыдущие построения и неточность формы Ω , а posteriori 1-форма δS окажется точной просто потому, что само пространство путей M односвязно. Для точности 1-формы (δS) и однозначности функционала S достаточно, чтобы форма Ω на универсальном накрытии стала точной $q: \hat{W}^m \rightarrow W^m$, $q^*\Omega = d\psi$. Это верно, если класс гомологий формы $[\Omega] \in H^2(W^m, \mathbb{R})$ содержится в подгруппе, связанной только с фундаментальной группой:

$$[\Omega] \in H^2(\pi_1, \mathbb{R}) \subset H^2(W^m, \mathbb{R}).$$

Задача 1. Найти достаточное условие того, что функционал S на пространстве замкнутых кривых принимает сколь угодно большие отрицательные значения (условие на группу π_1 и класс гомологий $[\Omega] \in H^2(\pi_1, \mathbb{R})$).

Для односвязных многообразий W^m такого быть не может. Интегралы от 1-формы (dS) по базисным циклам в M и степень иррациональности формы $\omega = (\delta S)$ определяются набором интегралов 2-формы Ω по базисным 2-циклам в $H_2(W^m, \mathbb{Z})$ и совпадают с ними.

К экстремалям функционалов вида (7) сводятся некоторые важные системы классической механики (Новиков—Шмельцер):

1. Задача Кирхгофа о движении твердого тела в идеальной жидкости, движение которой потенциально и которая поконится на бесконечности;

2. Задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в осесимметричном, — в частности, постоянном — гравитационном поле (волчок, гироскоп и др.).

Обе эти задачи описываются уравнениями, представляющими собой после некоторых преобразований гамильтоновы системы на алгебре Ли $L = E$ (3) группы движений евклидова трехмерного пространства, где фазовым пространством является сопряженное пространство L^* . Выбрав базис (e_i^*) , в L^* мы представляем любой элемент в виде

$$l^* = \sum l_i e_i^*, \quad (10)$$

причем $l_i \in L$ — линейные формы на L^* , $L = (L^*)^*$. По определению, скобка Пуассона для любых функций $f(l^*)$ на L^* определяется, исходя из следующих требований,

1. Скобка Пуассона двух линейных функций из L^* — т. е. элементов алгебры Ли L — совпадает с их коммутатором в L :

$$\{l_i, l_j\} = c_{ij}^k l_k. \quad (11)$$

2. Скобка Пуассона любых функций на L^* определяется требованием 1 вместе с общими аксиомами, которым удовлетворяет скобка: билинейность, кососимметричность, тождество Якоби и формула Лейбница для произведения функций

$$\{f, gh\} = \{f, h\}g + \{g, h\}f. \quad (12)$$

Вообще говоря, скобка Пуассона любых функций на многообразии N^q с локальными координатами (x^1, \dots, x^q) определяется тензором $h^{ij}(x) = -h^{ji}(x)$ по формуле

$$\{f, g\} = h^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \quad (13)$$

Требование, чтобы формула (13) задавала скобку Пуассона, т. е. было верно тождество Якоби, накладывает ограничения на тензор $h^{ij}(x)$: если $\det h^{ij} \neq 0$, то обратная к тензору h^{ij} 2-форма $h = h_{ij} dx^i \wedge dx^j$ должна быть замкнутой: $dh = 0$, $h_{ij} r^k = \delta_{ij}^k$.

Простейший случай $h^{ij} = \text{const}$ появлялся в классическом гамильтоновом формализме, возникающем из вариационного исчисления (см. [1], ч. I, § 33). Следующий случай h^{ij} — линейной функции от x — интенсивно обсуждался в литературе в течение последних 15 лет, так как $h^{ij}(x) = c_k^{ij} x^k$, где c_k^{ij} оказывается набором структурных констант алгебры Ли (это следует из тождества Якоби для скобки).

По-видимому, случай квадратичных по x скобок $h^{ij} = c_{ijk}^{ij} x^k x^i$ оказался также весьма интересен и начал сейчас изучаться (Склинин, Фаддеев).

Нам важен «линейный по x » случай алгебр Ли, более узко — алгебры $L = E$ (3). Выберем стандартный базис генераторов этой алгебры $(M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3)$, где генераторы p_i отвечают трансляциям и M_i — вращениям. Скобка Пуассона (11) согласно определению имеет вид коммутаторов в $L = E$ (3):

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \sum_k \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \varepsilon_{ijk} = \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}, \\ \{M_i, p_j\} &= \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k, \\ \{p_i, p_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Гамильтониан системы $H(M, p)$ в задаче Кирхгофа совпадает с энергией системы тело — жидкость и является положительной квадратичной формой от переменных (M, p) на пространстве L^* (возможны линейные члены в H , если твердое тело неодносвязно):

$$H = \sum a_{ij} M_i M_j + \sum b_{ij} M_i p_j + \sum c_{ij} p_i p_j. \quad (15)$$

Для движения твердого тела (волчка, гироскопа) в осесимметричном гравитационном поле $U(z)$ вокруг неподвижной точки гамильтониан на пространстве L^* имеет вид

$$H = \sum a_{ij} M_i M_j + U(d^i p_i), \quad (16)$$

где d^i — константы, определяемые положением центра масс, и точки закрепления. Квадратичная форма $\sum a_{ij} M_i M_j$ всегда предполагается положительной. В случае (16) имеются ограничения типа неравенств на эту формулу, которых нет в задаче Кирхгофа (15).

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{M}_i = \{H, M_i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}. \quad (17)$$

Кроме энергии $H = E$ сохраняющимися величинами (интеграми) общего вида для систем (17) являются такие функции $f_i(M, p)$, что

$$\{f_i, M_i\} \equiv \{f_i, p_i\} \equiv 0 \quad (18)$$

для всех $i = 1, 2, 3$ (т. е. аннулятор скобки Пуассона). Эти величины, лежащие, как оказывается, в центре так называемой «обертивающей алгебры» алгебры Ли, в данном случае сводятся к двум величинам («интегралам Кирхгофа»):

$$f_1 = \sum p_i^2, \quad f_2 = \sum M_i p_i \quad (19)$$

(проверьте (19) элементарным вычислением).

В задаче о волчке (гироскопе) величины p_i таковы, что $f_1 \equiv 1$ всегда. Интеграл f_2 называется в этом случае «константой площадей». На поверхностях уровня $f_2 = \text{const} = ps$ скобки Пуассона задаются формулами (14), и матрица $h^{ij}(x)$ на этом четырехмерном многообразии при $p \neq 0$ невырождена: $\det h^{ij} \neq 0$. Поэтому определена «симплектическая» 2-форма $h = h_{ij} dx^i \wedge dx^j$, $h_{ij} r^k = \delta_{ij}^k$, где $dh = 0$. Форма h зависит от величины уровней $f_1 = p^2, f_2 = ps$. Имеет место следующая важная

Л е м м а 2. Замена переменных

$$\begin{aligned} y^1 &= 0, \quad y^2 = \varphi, \quad \xi_2 = p_\theta, \quad \xi_1 = p_\varphi, \quad \gamma = \frac{s}{p}, \\ 0 < \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} p \sin \theta &= p_3, & M_3 - \gamma p_3 &= -p_\varphi, \\ p \cos \theta \cos \varphi &= p_2, & M_2 - \gamma p_2 &= p_\varphi \operatorname{tg} \theta \sin \varphi + p_\theta \cos \varphi, \\ p \cos \theta \sin \varphi &= p_1, & M_1 - \gamma p_1 &= p_\varphi \operatorname{tg} \theta \cos \varphi - p_\theta \sin \varphi \end{aligned}$$

приводит скобку Пуассона на поверхностях уровня $f_1 = p^2 \neq 0, f_2 = ps$ к виду

$$\{y^a, y^b\} = 0, \quad \{y^a, \xi_b\} = \delta_b^a, \quad \{\xi_1, \xi_2\} = s \cos \theta. \quad (21)$$

При этом симплектическая 2-форма приобретает вид

$$h = \sum_{a=1}^2 dy^a \wedge d\xi_a + s \cos \theta d\theta \wedge d\varphi = h_0 + \Omega,$$

где Ω — замкнутая форма на S^2 .

Топологически поверхность уровня $f_1 = p^2 \neq 0$, $f_2 = ps$ диффеоморфна $T^*(S^2)$ — касательному расслоению над сферой S^2 . Интеграл от форм h и Ω по базисному циклу $[S^2] \in H_2(T^*(S^2)) = \mathbb{Z}$ имеет вид

$$\int \int h = \int \int \Omega = 4\pi s = 4\pi f_2 f_1^{-1/2}.$$

Доказательство этой леммы получается прямым вычислением. Топологическая структура орбит $f_1 = p^2$, $f_2 = ps$ почти очевидна из вида интегралов f_1 , f_2 .

Мы сталкиваемся со скобками Пуассона на $T^*(M^n)$ вида $h = h_0 + \Omega$, где Ω — замкнутая 2-форма в базе M^n . Такая скобка Пуассона эквивалентна включению в систему формального магнитного поля Ω . Таким образом, траектории движения в задачах Кирхгофа и волчка (гироскопа) могут быть получены из принципа «Монпертю — Ферма», т. е. из функционала вида (7), который является многозначным при $s \neq 0$ или $f_2 \neq 0$ (для классического гироскопа «константа площадей» отлична от нуля). Гамильтониан H на поверхностях $f_1 = p^2 \neq 0$, $f_2 = ps$ в переменных (20) имеет вид

$$H = \frac{1}{2} g(y) \xi_a \xi_b + A^a(y) \xi_a + U(y),$$

и скобка Пуассона определяется формулами (21). Эта система эквивалентна в области $U_\alpha = S^2 \setminus (P_1 \cup P_2)$ (P_1 и P_2 — верхний и нижний полюса) лагранжевой системе, определяемой функционалом механического действия

$$S^{(\alpha)}[\gamma] = \int \left(\frac{1}{2} g_{ab} \dot{y}^a \dot{y}^b - U(y) - A_a(y) \dot{y}^a - s \sin \theta \dot{\varphi} \right) dt, \quad (22)$$

где

$$g_{ab} g^{ac} = \delta^c_b, \quad A_a g^{ac} = A^c, \quad y^1 = \theta, \quad y^2 = \varphi,$$

$$U = \left(V - \frac{1}{2} A^a A^b g_{ab} \right).$$

Функционал S имеет вид функционала действия заряженной частицы на сфере S^2 с метрикой g_{ab} в потенциальном поле $U(x)$ и в магнитном поле $\Omega_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ нетривиального «монополя», поскольку при $s \neq 0$ «магнитное поле» топологически нетривиально. Роль номера α для области U_α на сфере S^2 играет пара противоположных полюсов

$$\alpha = (P_1 \cup P_2).$$

Для покрытия $S^2 = \bigcup_\alpha U_\alpha$ выполнены те требования (см. выше), с помощью которых определялся многозначный функционал. Итак, в нашем случае S — это многозначный при $s \neq 0$ функционал действия этой системы, зависящий от уровня (p, s) .

При фиксированной энергии E траектории движения можно получить из функционала Монпертю — Ферма, тоже многозначного, где $\delta \tilde{S}$ — замкнутая бесконечномерная 1-форма

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{(\alpha)} &= \int_V (dI_E - A_a^{(\alpha)} dy^a), \\ dI_E &= \sqrt{2(E - U) g_{ab} \dot{y}^a \dot{y}^b}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для $E > \max_{S^2} U(y)$ метрика \tilde{I}_E полна.

Выделим явно важное свойство однозначного или многозначного функционала вида (7):

на пространстве замкнутых направленных кривых $M = \Omega^+(S^2)$ одноточечные кривые образуют невырожденное критическое многообразие локальных минимумов. Мы будем нормировать функционал \tilde{S} на бесконечнолистной накрывающей $p: \hat{M} \rightarrow M$ (где \tilde{S} — однозначна) таким образом: на одной компоненте (пусть нулевой) из полного прообраза $p^{-1}(S^2) = \bigcup_n S_n^2$ многообразия одноточечных кривых функционал равен нулю,

$$\begin{aligned} \tilde{S}(S_0^2) &= 0, \\ \tilde{S}(S_n^2) &= n \int \int \Omega = 4\pi n s. \end{aligned} \quad (24)$$

Обобщение этого свойства на любые многообразия W^m самоочевидно.

Используем эти свойства пространства замкнутых кривых. Соединим отрезком $I(0, 1)$ две компоненты локальных минимумов на накрывающей \hat{M} так, что точка 0 лежит в S_0^2 и точка 1 лежит в $S_1^2 \subset \hat{M}$. Начнем монотонно сдвигать этот отрезок «вниз» по градиенту \tilde{S} , получая отрезок I_τ , $\tau \geq 0$, $I_0 = I$. Мы видим следующее:

- а) края неподвижны при всех τ ;
- б) $\max_{\tau=\text{const}} \tilde{S}(I_\tau) \geq 4\pi s$, так как на краях — локальный минимум.

Из этого вместе с известным принципом минимакса следует существование седловой критической точки, имеющей индекс 1 в невырожденном случае.

Итак, верна следующая

Теорема 1 (Новиков). Для всех значений параметров (E, p, s) при условии (9) существует траектория в задаче Кирхгофа и движение волчка (гироскопа), периодическая в системе, связанной с телом.

Замечания. а) Ряд механиков методами теории возмущений получали более явно такие семейства вблизи интегрируемых случаев. Возможность продолжения этих семейств на значения параметров, далекие от интегрируемых случаев, оставалась недоказанной; б) для нулевой константы площадей $s = 0$ в задаче о гироскопе возникает однозначный функционал на S^3 эквивалентный метрике в силу принципа Мопертюн — Ферма. Этот результат другим методом был получен ранее (Козлов, Харламов). Здесь для $E > \max U(x)$ можно использовать уже известные теоремы Люстерника — Шнирельмана; для $E < \max U$ исследование проведено Козловым.

Обратимся теперь к чисто топологической задаче о построении аналога теории Морса, для замкнутых 1-форм ω на гладких замкнутых конечномерных многообразиях $M = M^n$. В простейшем случае, если форма ω представляет целочисленный класс когомологий $[\omega] \in H^1(M^n, \mathbb{R})$, мы приходим к отображению в окружность

$$f = \exp(2\pi i S): M^n \rightarrow S^1, \quad S = \hat{f}: \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Рассмотрим этот случай. Если критических точек нет, то отображение f определяет гладкое расслоение с базой $B = S^1$.

Циклическое \mathbb{Z} -накрытие $\hat{M} \xrightarrow{\rho} M^n$ строится таким образом: реализуем подмногообразием N^{n-1} цикл D $[\omega] \in H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z})$, где D — оператор двойственности Пуанкаре. Разрезав многообразие M^n по циклу N^{n-1} , мы получим пленку W^n с двумя краями $\partial W = N_0^{n-1} \cup N_1^{n-1}$, диффеоморфными N^{n-1} (см. также § 27). Возьмем бесконечное число экземпляров этой пленки $W \approx W_i$ с границами $\partial W_i = N_{i,0} \cup N_{i,1}$, диффеоморфными N^{n-1} . Склейим их друг с другом вдоль краев согласно указанным номерам компонент границы

$$\hat{M} = \bigcup_{-\infty < i < \infty} W_i, \quad N_{i-1,0} = N_{i,1}, \quad -\infty < i < \infty.$$

Можно считать, что многообразие $N^{n-1} = N_0^{n-1}$ выбрано как поверхность уровня функции S (или полный прообраз точки при отображении $f = \exp(2\pi i S)$). Оператор монодромии действует так:

$$\begin{aligned} t: W_i &\mapsto W_{i+1}, \quad N_{i,0} \rightarrow N_{i,1} = N_{i+1,0}, \\ \hat{M} &\rightarrow \hat{M}. \end{aligned} \tag{25}$$

В соответствии с общими принципами функция S должна порождать клеточный комплекс (см. § 15). Однако в нашем случае не выполнено важнейшее требование, на котором основывалась обычная теория Морса: в этой теории всегда требовалось, чтобы области меньших значений $S < a$ были относительно компактными — в конечномерном или бесконечномерном случае. В нашем случае это неверно. Однако и в нашем случае из каждой критической точки индекса i выходит «ениз» по уровням «поверхность наискорейшего спуска», которую (или ее малое шевеление, если необходимо) естественно считать «клеткой». Однако эта «клетка» может тянуться по уровням S до $-\infty$; в ее алгебраическую границу может входить бесконечное число таких же «клеток» размерности $i - 1$. При сдвиге $t: \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ функция S переходит в себя с добавлением константы, переводя критические точки в критические точки. Итак, мы приходим к выводам:

- а) каждая критическая точка определяет свободную образующую в интересующем нас комплексе;
- б) граница клетки может быть бесконечной линейной комбинацией клеток этого комплекса, лежащих «ниже» по уровням функции S , т. е. уходящих в ∞ только в одну сторону в \hat{M} ;
- в) все «клетки» получаются из конечного числа базисных всевозможными сдвигами на элементы t^{m_j} группы \mathbb{Z} , действующей на \hat{M} .

Введем кольцо, состоящее из лорановских рядов вида

$$\sum_{-\infty < \text{const} < j} m_j t^j, \tag{26}$$

с целыми коэффициентами m_j , обращающимися в нуль для всех достаточно больших отрицательных j . Обозначим это кольцо через $\hat{\mathbb{Z}}^+ [t, t^{-1}] = K$. Клеточный комплекс, порожденный многозначной функцией на многообразии M^n , или функцией S на накрытии $\hat{M} \rightarrow M^n$, мы будем рассматривать как свободный комплекс K -модулей C с конечным числом образующих (так как число критических точек конечно). Комплекс C имеет вид

$$0 \xrightarrow{\delta} C_n \xrightarrow{\delta} C_{n-1} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C_1 \xrightarrow{\delta} C_0 \xrightarrow{\delta} 0,$$

где δ — гомоморфизм K -модулей. Заметим, что в отличие от обычной теории Морса здесь возможна ситуация $C_0 = 0$, $C_n = 0$. Более того, на любом многообразии M^n существует замкнутая 1-форма любого нетривиального класса когомологий $[\omega] \in H^1(M^n, \mathbb{Z})$ такая, что локальных минимумов и максимумов вообще нет (т. е. $C_0 = C_n = 0$).

Для косых произведений M^n с базой S^1 существует форма ω без критических точек, т. е. $C_n = C_{n-1} = \dots = C_0 = 0$.

Имеет место следующая

Лемма 3. Гомологии комплекса K -модулей C , порожденного любой гладкой замкнутой 1-формой ω , гомотопически инвариантны.

Не доказывая эту простую лемму, мы видим, что инварианты этих групп гомологий могут быть использованы для получения аналогов неравенств Морса в случае многозначных функций, порождающих отображение в окружность

$$\exp(2\pi i S) : M^n \rightarrow S^1.$$

Кольцо K является гомологически одномерным (если коэффициенты рядов (26) являются элементами поля, то K также является полем). Следовательно, подмодули свободных модулей являются всегда свободными. Это позволяет выбрать свободные базисы в группах (модулях) «циклов» $Z_k = \text{Ker } \partial \subset C_n$ и «границ» $B_k \subset Z_k$. Разность рангов этих модулей мы назовем «числом Бетти» и обозначим через $b_k(M^n, a)$, где $a = [\omega]$.

$$b_k(M^n, a) = \text{rang } Z_k - \text{rang } B_k.$$

Аналоги чисел кручения $q_k(M^n, a)$ определяются так: можно выбрать свободные базисы (e'_1, \dots, e'_N) модуля Z_k и (e''_1, \dots, e''_L) , подмодуля B_k , где $N - L = b_k$ с такими свойствами:

$$e'_i = \left(n_j + \sum_{k \geq 1} n_{jk} t^k \right) e_j + \sum_{i > L} q_{ij}(t) e_i,$$

причем: 1) число n_j делится на число n_{j+1} ; 2) степени всех членов рядов $q_{ij}(t)$ неотрицательны; 3) числа $q_{ij}(0) \neq 0$ и делятся на n_j для всех i, j (если ряд q_{ij} не обращается в нуль тождественно).

Общее число индексов j таких, что $n_j \neq 1$, называется числом кручения и обозначается через $q_k(M^n, \omega)$. Число $q_k + b_k$ совпадает с минимальным числом образующих модуля $H_k = Z_k / B_k$.

Теорема 2. Имеют место следующие аналоги неравенств Морса для чисел $m_i(S)$ или $m_i(\omega)$ критических точек индекса i для отображения в окружность $\exp(2\pi i S)$ или замкнутой 1-формы ω , где $[\omega] \in H^1(M^n, Z)$:

$$m_i(S) \geq b_i(M^n, [\omega]) + q_i(M^n, [\omega]) - q_{i-1}(M^n, [\omega]). \quad (27)$$

Доказательство этой теоремы несложно получить из предыдущего.

Заметим, что полученные нами аналоги неравенств Морса аналогичны классическим, но входящие в них топологические инварианты имеют более сложный геометрический смысл.

Для многообразий с $\pi_1(M^n) = Z$ имеет смысл вопрос о точности неравенств (27), аналогичный известной теореме Смейла об однозначных функциях на односвязных многообразиях. Можно построить без труда одну поверхность уровня $N^{n-1} \subset M^n$, которая

дуальна классу $[\omega] \in H^1(M^n, Z)$ и является связной и односвязной (во всяком случае, для $n \geq 5$). Далее, используя функцию Смейла на пленке W^n с двумя краями $\partial W^n = N^{n-1} \cup N^{n-1}$, полученной из M^n разрезанием, можно «минимальным» образом (используя функцию Смейла на W^n) продолжить поверхность уровня N^{n-1} на все многообразие M^n и получить форму ω на M^n и функцию S на накрытии $\hat{M} \rightarrow M^n$. Однако эта форма (или многозначная функция) может быть далеко не минимальной по числу критических точек. Построение минимальной 1-формы ω требует выбора в некотором смысле «минимального» начального многообразия $N^{n-1} \subset M^n$, если этот выбор вообще возможен. Было бы интересно разобрать этот вопрос до конца для многообразий с группой $\pi_1(M^n) = Z$. (Эта задача решена Фарбером в 1983 г.)

Сделаем несколько замечаний, относящихся к более сложному случаю $k > 1$, т. е. когда форма ω имеет по меньшей мере два рационально независимых интеграла по одномерным циклам,

$$x_i = \oint_{\gamma_i} \omega, \quad \gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_N \text{ — базис } H_1(M^n, Z),$$

$$x_1 \neq 0, \dots, x_k \neq 0, \quad \sum m_i x_i \neq 0,$$

m_i — любые целые числа. Возникает накрытие $\hat{M} \xrightarrow{\rho} M^n$, где $\rho^* \omega = dS$ и группа монодромии — свободная абелева. Введем кольцо K_x , состоящее из рядов $b \in K_x$ с целыми коэффициентами

$$b = \sum_{m=(m_1 \dots m_k)} b_m f_1^{m_1} \dots f_k^{m_k}$$

таких, что

1. $b_m \equiv 0$, если $\sum m_i x_i$ достаточно велико по модулю и отрицательно.

2. «Устойчивость» по x — т. е. для любого ряда b найдутся такие числа $\varepsilon > 0$ и N , что $b_m \equiv 0$, если выполнены условия

$$\sum m_i x_i^* < -N, \quad \text{где } \sum |x_i^* - x_i| < \varepsilon.$$

Замкнутая 1-форма ω определяет клеточный комплекс, рассматриваемый как комплекс K_x -модулей. Гомологии этого комплекса гомотопически инвариантны, и могут служить базой для построения неравенств типа Морса. Интересно исследовать зависимость возникающих здесь комплексов и гомологий от x , если форма ω мало меняется, и критические точки, по существу, остаются прежними.

Если критических точек форма ω совсем не имеет, то многообразие M^n имеет вид

$$M^n = \hat{M}/Z^k = (\hat{N} \times R)/Z^k,$$

где \hat{N} — типичный слой слоения $\omega = 0$. Все слои в данном случае одинаковы. Из аппроксимации формы ω замкнутыми формами $\omega_j \rightarrow \omega$ с рациональными интегралами по циклам, без критических точек, видно, что многообразие M^n есть косое произведение с базой — окружность. Слои этих косых произведений представляют собой компактные многообразия N_i^{n-1} , которые являются факторами \hat{N} ,

$$\hat{N} \rightarrow N_i^{n-1},$$

т. е. \hat{N} является регуляризмом накрытием над N_i^{n-1} с группой монодромии Z^{k-1} .

ЛИТЕРАТУРА К ПРИЛОЖЕНИЮ I

1. Новиков С. П., Шмелев И. — Функц. анализ, 1981, 15, № 3, с. 54.
2. Новиков С. П. — Функц. анализ, 1981, 15, вып. 4, с. 37—52.
3. Новиков С. П. — ДАН СССР, 1981, 260, № 1, с. 31.
4. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. — УМН, 1982, 37, № 5, с. 3—49.
5. Новиков С. П., Тайманов И. А. — ДАН СССР, 1984, 274, № 1, с. 26 (Работа [5] содержит исправление некоторых неточностей обзора [4].)

А. Т. ФОМЕНКО

Приложение 2

ЗАДАЧА ПЛАТО, БОРДИЗМЫ И ГЛОБАЛЬНО МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

I. Локально минимальные поверхности.

Как отмечалось в [1], ч. I, § 37, хорошей наглядной физической моделью двумерных минимальных поверхностей являются мыльные пленки, затягивающие фиксированный проволочный контур в трехмерном евклидовом пространстве. Напомним определение функционала многомерного объема. Пусть V^k — гладкое компактное подмногообразие в римановом многообразии M^n , пусть $D \subset \subset V$ — компактная область на этом подмногообразии и g_{ij} — индуцированная на V риманова метрика. Тогда определено число $\text{vol}_k D$, называемое k -мерным объемом области на подмногообразии относительно метрики g_{ij} . Если подмногообразие компактно, то получаем соответствие $V \rightarrow \text{vol}_k V$, задающее функционал риманова объема на классе k -мерных подмногообразий. Экстремали этого функционала называются локально минимальными поверхностями. Например, для случая гиперповерхности V , вложенной в евклидово пространство \mathbb{R}^n , уравнение Эйлера—Лагранжа для этого функционала, решениями которого являются локально минимальные поверхности, было выведено в [1], ч. I, § 37. Условие локальной минимальности гиперповерхности V в \mathbb{R}^n можно записать на языке локальных инвариантов вложения этой поверхности в евклидово пространство. Напомним классический результат (доказательство см., например, в [1], ч. I, § 37):

Предложение 1. Пусть $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая гиперповерхность (возможно, с непустым краем). Средняя кривизна H этой гиперповерхности равна тождественно нулю тогда и только тогда, когда эту поверхность можно представить в окрестности каждой ее внутренней точки в виде графика экстремальной функции для функционала объема (т. е. в виде решения уравнения минимальной гиперповерхности).

Двумерные минимальные поверхности в трехмерном пространстве допускают довольно простое аналитическое описание. Предположим, что поверхность V^2 задается радиус-вектором $r: D(u, v) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r = r(u, v)$, где D — область на плоскости, отнесенной

к декартовым координатам u, v . Легко проверить, что если u и v являются конформными координатами на поверхности (т. е. индуцированная на поверхности риманова метрика имеет вид $\lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$), то радиус-вектор будет гармоническим, т. е. его координаты являются гармоническими функциями (относительно оператора $\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$). Подробности см. в [1], ч. I, § 37. Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. поверхность, заметаемая гармоническим радиус-вектором, не обязана быть минимальной. Топологическая структура двумерных минимальных поверхностей достаточно сложна, в частности (несмотря на существование минимальной поверхности, затягивающей любой кусочно-гладкий замкнутый контур), нет теоремы единственности минимальной поверхности с заданным фиксированным граничным контуром (краем поверхности). Кроме того, минимальные пленки могут иметь особенности.

«Задача Плато» — это термин, объединяющий серию задач, связанных с изучением экстремалей и абсолютных минимумов функционала k -мерного объема, определенного на классе k -мерных поверхностей, вложенных в объемлющее риманово многообразие и удовлетворяющих тем или иным граничным условиям. В богатой истории развития вариационных задач этого вида естественно выделяются несколько периодов, характеризующихся существенно различными подходами к самим понятиям «поверхности», «границы», «минимизация» и, соответственно, — различными методами получения минимальных решений. Исторически первой была поставлена и решена задача Плато для двумерной поверхности с краем в \mathbb{R}^3 (а затем и в \mathbb{R}^n). В параметрическом виде эта задача может быть сформулирована так.

Пусть $r(u, v)$ — радиус-вектор поверхности V^2 в \mathbb{R}^n , т. е. $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ задает (локально) регулярное отображение двумерной области $D \subset \mathbb{R}^2$ в пространство \mathbb{R}^n . Тогда $\text{vol}_2 f(D) = \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv$. Вопрос: можно ли найти поверхность

$X_0^2 = f_0(D)$ (и отображение f_0) такую, чтобы она имела в качестве границы заданный контур A , т. е. систему вложенных в \mathbb{R}^n непересекающихся окружностей, причем чтобы площадь этой искомой поверхности была наименьшей по сравнению с площадями всех других поверхностей вида $X^2 = f(D)$, ограниченных этим же контуром (т. е. имеющих тот же край)? Кроме этой задачи о нахождении абсолютного минимума (в классе всех поверхностей с заданной границей), рассматривалась также и задача о нахождении минимума в данном гомотопическом классе, т. е. в классе поверхностей (с фиксированной границей), задаваемых гомотопными друг другу отображениями. Оказывается, в двумерном случае эти задачи решаются в положительном смысле (см., например, обзоры в [1*],

[2*]). Отметим, что минимальная пленка $X_0^2 = f_0(D)$ может иметь самопересечения и другие сингулярные точки (в зависимости от конфигурации граничного контура). Литература по этой двумерной задаче и по связанным с ней вопросам огромна, но поскольку нашей основной целью является обзор многомерной проблемы Плато, то мы отсылаем читателя, интересующегося «двумерной тематикой», к обзорам [5*], [6*].

Для того чтобы перейти к анализу многомерной задачи, нам потребуются некоторые понятия, связанные со второй фундаментальной формой риманова многообразия.

Пусть $f: M^k \rightarrow W^n$ — гладкое вложение гладкого многообразия M^k в гладкое ориентируемое связное замкнутое риманово многообразие W^n . Через TM обозначим касательное расслоение многообразия M . Пусть $T_m M$ — касательная плоскость к M в точке $m \in M$. Через $\langle x, y \rangle$ обозначим скалярное произведение векторов $x, y \in T_m M$, индуцированное заданной на W римановой метрикой. Пусть $\bar{\nabla}$ — симметричная риманова связность на TW , согласованная с этой метрикой. Как обычно, для произвольного тензорного поля P через $\bar{\nabla}_X P$ обозначим ковариантную производную вдоль векторного поля X на W для связности $\bar{\nabla}$. Если x — значение векторного поля X в точке m (т. е. вектор из плоскости $T_m W$), то ковариантную производную поля P вдоль направления x обозначим через $\bar{\nabla}_x P$.

Для краткости обозначим подмногообразие $f(M^k) \subset W^n$ снова через M^k , тогда наряду с касательным расслоением TM определено нормальное расслоение NM , поскольку в каждой точке $m \in M$ определена плоскость N_m^{n-k} , ортогональная к плоскости $T_m M$. Вложение $M \rightarrow W$ порождает естественные римановы связности на TM и на NM . Пусть Y — гладкое векторное поле на подмногообразии M и $x \in T_m M$ — произвольный касательный вектор. Положим, по определению, $\bar{\nabla}_x Y = (\bar{\nabla}_x Y)^T$, где через $\bar{\nabla}$ обозначена риманова симметричная связность, заданная на объемлющем многообразии W , а $(\cdot)^T$ — ортогональное проектирование на касательную плоскость $T_m M$. Легко проверяется, что эта операция является римановой связностью без кручения на TM , однозначно определяемой римановой метрикой на M , индуцированной вложением $M \rightarrow W$. Точно так же определяется связность на нормальном расслоении NM . Рассмотрим произвольное гладкое сечение V расслоения NM , т. е. зададим в каждой точке $m \in M$ нормальный вектор $V(m) \in N_m M$. Мы получаем гладкое векторное поле \tilde{V} , определенное на подмногообразии M . Если $x \in T_m M$, то положим $\nabla_x V = (\bar{\nabla}_x \tilde{V})^N$, где $(\cdot)^N$ — ортогональная проекция на плоскость $N_m M$. Эта операция является римановой связностью без кручения на NM . Переходим к построению второй квадратичной формы подмногообразия M (произвольной коразмерности).

Определение 1. Пусть $x \in T_m M$, $v \in N_m M$. Включим вектор v в произвольное гладкое векторное поле V на многообразии W так, чтобы поле V было ортогонально к подмногообразию M в некоторой окрестности точки $m \in M$. Определим линейное отображение $Q^v: T_m M \rightarrow T_m M$ по формуле: $Q^v(x) = -(\bar{\nabla}_x V)^T$. Это отображение оказывается симметричным и, следовательно, определяет некоторую билинейную форму $\{Q^v\}$, которая и называется *второй фундаментальной формой* подмногообразия $M \subset W$.

В действительности мы определили целое семейство Q форм Q^v , в котором вектор $v \in N_m M$ играет роль параметра, $Q = \{Q^v\}$. Оказывается, Q корректно определена, т. е. не зависит от способа включения вектора v в векторное поле V на многообразии W и гладко зависит от всех своих аргументов. Эквивалентным образом Q может интерпретироваться как билинейная симметричная форма на касательном пространстве $T_m M$ со значениями в нормальном пространстве $N_m M$. В самом деле, если $x, y \in T_m M$, то можно определить форму $Q(x, y) \in N_m M$ равенством: $(Q(x, y), v) = \langle Q^v x, y \rangle$. Включим вектор y в гладкое векторное поле Y на многообразии W , касательное к подмногообразию M . Тогда имеем: $Q(x, y) = \langle V_x Y \rangle^N$. С помощью формы Q можно теперь определить среднюю кривизну подмногообразия M .

Определение 2. Рассмотрим вторую фундаментальную форму, представленную в виде формы Q на касательном пространстве $T_m M$. Так как на $T_m M$ определено скалярное произведение, то можно рассмотреть след формы Q , являющийся (в каждой точке m) некоторым вектором из $N_m M$. Итак, след формы Q изображается гладким сечением H нормального расслоения $N M$. Это сечение и называется средней кривизной вложенного подмногообразия $M \subset W$.

Если M — гиперповерхность в многообразии W , то получаем скалярную среднюю кривизну $H = \text{Sp } R^{-1} Q$, где R и Q — матрицы первой и второй квадратичных форм соответственно.

Определение 3. Подмногообразие $M \subset W$ называется локально минимальным, если его средняя кривизна H тождественно равна нулю (во всех точках этого многообразия).

Существует тесная связь между обращением в нуль средней кривизны подмногообразия и обращением в нуль первой производной функционала объема. Пусть задана гладкая гомотопия $f_t: M \rightarrow W$, $0 < t < 1$, такая, что каждое отображение f_t является вложением, причем $f_0 = f$, где f — исходное вложение. Такие гомотопии иногда называются изотопическими вариациями. Известно следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть M — компактное подмногообразие в W и $v_k(t) = \text{vol}_k f_t M$. Подмногообразие M локально минимально тогда и только тогда, когда $\frac{dv_k(0)}{dt} = 0$ для

любой изотопической вариации подмногообразия M , обращающейся в нуль на границе ∂M .

Таким образом, подмногообразия нулевой средней кривизны — это экстремали функционала объема. Термин «локальная минимальность» означает, что объем подмногообразия «не изменяется в первом приложении» (т. е. первая его производная равна нулю) при бесконечно малых по амплитуде и по носителю вариациях. Если вариация имеет конечную величину, то объем может уменьшиться. Например, это имеет место для экватора в стандартной сфере, который, конечно, локально минимальен (он даже вполне геодезическое подмногообразие), но стягивается в точку по сфере, а потому не является глобально минимальным подмногообразием. Напомним, что любое вполне геодезическое подмногообразие локально минимально, поскольку в этом случае вторая фундаментальная форма тождественно равна нулю. Понятие глобальной минимальности само по себе нетривиально, поскольку требует рассмотрения «больших вариаций». Дадим одно из определений таких «больших вариаций».

Определение 4. Пусть $M^k \subset W^n$ — компактное ориентируемое замкнутое подмногообразие. Мы скажем, что задана его бордизм-деформация, если задано $(k+1)$ -мерное гладкое компактное ориентируемое подмногообразие $Z^{k+1} \subset W^n$ с краем $\partial Z = M \cup (-P)$, где $(-P)$ — это подмногообразие P с обратной ориентацией. При этом многообразие P^k мы назовем бордизм-вариацией многообразия M^k . В случае некомпактного подмногообразия $M \subset W$ будем говорить, что задана его бордизм-деформация, если в W задано подмногообразие P^k , совпадающее с M^k вне некоторой компактной области и, кроме того, задано $(k+1)$ -мерное подмногообразие Z с кусочно-гладким краем $\partial Z \subset M \cup (-P)$.

В [1], ч. I, § 37 мы привели пример глобально минимальных поверхностей; это — комплексные подмногообразия в кэлеровом многообразии.

II. Многомерные вариационные задачи и теория бордизмов.

Рассмотрим классические постановки задач о нахождении абсолютных и относительных минимумов в классе поверхностей определенного топологического типа. Выделим в многообразии M^n фиксированное $(k-1)$ -мерное гладкое компактное замкнутое подмногообразие A^{k-1} , которое будем в дальнейшем для краткости называть «контуром». Рассмотрим всевозможные пары вида (W, f) , где W — гладкое компактное многообразие размерности k с краем ∂W , гомеоморфным контуру A , а $f: W \rightarrow M$ — непрерывное (или кусочно-гладкое) отображение, тождественное на крае ∂W .

Задача 1. Можно ли среди пар вида (W, f) , где W — всевозможные многообразия с краем A , а $f: W \rightarrow M$ — отображения W в M , тождественные на крае A , найти пару (W_0, f_0) такую, чтобы отображение f_0 или пленка $X_0 = f_0(W_0)$, являющаяся образом многообразия W_0 в M , обладали разумными свойствами?

минимальности? В частности, должно выполняться неравенство: $\text{vol}_k X_0 \ll \text{vol}_k X$, где $X = f(W)$ — любая пленка из указанного выше класса, а vol_k — либо риманов объем, либо стандартная мера Хаусдорфа.

Под «разумными свойствами минимальности» пленки $X_0 = f_0(W_0)$ в многообразии M , в дополнение к неравенству $\text{vol}_k X_0 \ll \text{vol}_k X$, можно, например, понимать следующее: существует нигде не плотное в пленке X_0 подмножество Z особых точек (сингулярных точек) такое, что каждая неособая точка $P \in X_0 \setminus Z$ обладает окрестностью U в M , для которой пересечение $(X_0 \setminus Z) \cap U$ состоит из гладких подмногообразий V_α размерностей, не превосходящих числа k , причем все V_α являются минимальными подмногообразиями в смысле классической дифференциальной геометрии, т. е. их средняя кривизна равна нулю.

Задача 2. Пусть (V, g) — пара, где $V = V^*$ — компактное ориентируемое замкнутое k -мерное многообразие, $g: V \rightarrow M$ — его непрерывное (или кусочно-гладкое) отображение в многообразие M^n , а $X = g(V)$ — образ V в M . Мы скажем, что пара (V', g') является бордизм-вариацией пары (V, g) , если существует компактное многообразие Z с краем $\partial Z = V \cup (-V')$ и непрерывное отображение $F: Z \rightarrow M$ такое, что $F|_V = g$, $F|_{V'} = g'$. Можно ли среди всех пар (V, g) указанного вида найти пару (V_0, g_0) такую, чтобы образ $X_0 = g_0(V_0)$ обладал разумными свойствами минимальности, в частности, чтобы выполнялось неравенство: $\text{vol}_k X_0 \ll \text{vol}_k X$, где $X = g(V)$ — любая пленка (поверхность) из указанного класса?

Задача 2 ставит вопрос о нахождении абсолютного минимума функционала объема в классе всех бордизм-вариаций заданной пары (V, g) .

Наряду с этими двумя задачами о нахождении абсолютного минимума естественно формулируются две задачи о нахождении относительных минимумов.

Задача 1'. Можно ли среди всех пар вида (W, f) , где W — некоторое фиксированное (!) многообразие с краем A , а $f: W \rightarrow M$ — всевозможные непрерывные (или кусочно-гладкие) отображения, гомотопные некоторому фиксированному отображению f' и тождественные на крае A (т. е. совпадающие с фиксированным гомеоморфизмом края), найти такую пару (W, f_0) , чтобы отображение f_0 , или пленка $X_0 = f_0(W)$, являющаяся образом W в M , обладали бы свойствами минимальности, т. е. чтобы $\text{vol}_k X_0 \ll \text{vol}_k X$, где $X = f(W)$ — любая пленка из данного гомотопического класса?

Это — задача о нахождении минимума функционала объема в каждом гомотопическом классе, т. е. задача об относительных минимумах, в отличие от предыдущей задачи о нахождении абсолютного минимума — по всем гомотопическим классам.

Задача 2'. Можно ли среди отображений $g: V^* \rightarrow M^n$ (где V — фиксированное замкнутое многообразие), гомотопных

некоторому исходному отображению $f: V \rightarrow M$, найти такое отображение g_0 , которое обладало бы свойством минимальности, т. е. чтобы $\text{vol}_k g_0(V) \ll \text{vol}_k g(V)$?

Мы начнем описание результатов с задач о нахождении абсолютного минимума. Задачи 1 и 1' мы будем называть для краткости задачами «заклейки контура», а задачи 2 и 2' — задачами реализации (циклов). Минимальные поверхности таких типов (если они существуют) назовем глобально минимальными. Теоремы их существования будут приведены ниже.

Опишем теперь эффект появления неустранимых стратов малых размерностей при минимизации многомерного функционала объема. Этот эффект не влияет на процесс минимизации функционала двумерного объема vol_2 , но играет существенную роль



Рис. 120.

в больших размерностях. На рис. 120 изображен контур A и пленка $X_t = f_t(W)$, стремящаяся занять в \mathbb{R}^3 положение, отвечающее наименьшей ее площади. Ясно, что в некоторый момент времени происходит «склонение», склейка пленки. При этом вместо тонкой трубки T на рисунке появится отрезок S . В двумерном случае от него легко избавиться, непрерывно отобразив его в двумерный диск, заклеивающий данный контур. При этом (что важно) мы не утрачиваем параметризации пленки: получившаяся пленка по-прежнему является образом некоторого двумерного многообразия с краем.

Ясно, что в больших размерностях при $k > 2$ возникновение ситуации, аналогичной описанной, резко усложняет задачу минимизации. По мере того как k -мерный объем деформирующейся пленки $X_t = f_t(W)$ стремится к минимуму, в этой пленке начинаются склейки, т. е. отображение $f_t: W \rightarrow M$, гомотопное исходному отображению $f = f_0$, уже не только не обязано быть вложением или погружением, но даже может понижать размерность образа на некоторых открытых в W подмножествах. Это приводит к появлению в образе $X_1 = f_1(W)$ кусков (стратов) S размерностей s , где $s \ll k - 1$. В отличие от двумерного случая такие «маломерные страты» нельзя, вообще говоря, ни отбросить, ни непрерывно отобразить в «массивную часть» (т. е. в k -мерную часть) $X^{(k)}$ пленки X , поскольку при этих операциях может быть утрачено

основное свойство пленки — быть непрерывным образом некоторого гладкого многообразия \tilde{W} с краем A . Так как наша цель — найти минимум в классе пленок вида $X = f(W)$, т. е. допускающих непрерывную параметризацию с помощью многообразия W , то при любом варианте устранения «маломерных стратов» мы должны были бы гарантировать, чтобы пленка \tilde{X} , получившаяся в результате такой перестройки, по-прежнему допускала такую параметризацию (быть может, с помощью другого многообразия). Однако, как показывают простые примеры, ни отбрасывание маломерных стратов, ни попытки отобразить их в массивную часть $X^{(k)}$ пленки X (с помощью какого-либо непрерывного отображения, определенного на всей пленке) не сохраняют в общем случае свойство пленки допускать непрерывную параметризацию. Можно было бы в целях упрощения задачи временно игнорировать страты малой размерности, ограничившись пока лишь рассмотрением функционала vol_k , с точки зрения которого все маломерные страты несущественны (их k -мерная мера равна нулю). Однако, как оказывается (см. детали в [7*]—[9*]), даже в этом упрощенном случае нахождение минимума требует получения обширной информации о поведении маломерных стратов, гарантирующих параметризацию пленки.

Опишем постановку задачи Плато на языке обычных гомологий. Вследствие указанных выше трудностей минимизации многомерных пленок возникла необходимость в разработке нового, более грубого языка, который позволил бы устраниТЬ влияние стратов малых размерностей. Необходимые шаги были предприняты в серии работ, обзор которых см. в [1*]—[4*]. Пусть $H_{k-1}(A)$ — группа спектральных ($k-1$)-мерных гомологий (с коэффициентами в группе G) замкнутого ($k-1$)-мерного многообразия — контура A в римановом многообразии M . Пусть $A \subset X \subset M$, где X — произвольная k -мерная поверхность в M . В дальнейшем в качестве «поверхностей» мы будем все время рассматривать измеримые (по Хаусдорфу) компакты в римановом многообразии. Пусть $\{X\}$ — класс всех таких поверхностей X , для которых гомоморфизм $i_*: H_{k-1}(A) \rightarrow H_{k-1}(X)$, индуцированный вложением $i: A \rightarrow X$, аннулирует всю группу гомологий $H_{k-1}(A)$. Положим $\lambda_k = \inf_{X \in \{X\}} \text{vol}_k X$, где $\text{vol}_k X$ обозначает, как и выше, k -мерную

меру Хаусдорфа или риманов объем (если он определен). Тогда оказывается (см., например, [1*]—[4*]), что всегда существует минимальная поверхность (в указанном выше смысле), т. е. всегда существует k -мерный компакт $X_0 \in \{X\}$ такой, что $\text{vol}_k X_0 = \lambda_k$. В рамках этого подхода выделилось два направления: более геометрическое (см. [2*], [3*]) и более функциональное (см. [1*], [4*]). В результате были доказаны замечательные теоремы существования абсолютного минимума в классе обычных гомологий, а также — почти всюду регулярность минимальных решений (Федерер, Флеминг, Альмгрен, Райфенберг и др.).

При таком подходе существенно использовалось то обстоятельство, что если $X \supset Y = \bar{Y}$, где $\dim \bar{X} \setminus \bar{Y} < k$, то $H_k(X) = H_k(Y)$ и $\text{vol}_k X = \text{vol}_k Y$. Это означает, что не возникает проблемы неустранимых маломерных стратов — они несущественны как с топологической, так и с метрической точек зрения. Однако это использование обычных гомологий для определения понятий «границы» и «заклейки контура» удалило нас от описанной ранее классической постановки, поскольку, если контур A является ($k-1$)-мерным подмногообразием в M и X_0 — минимальная поверхность, гомологически заклеивающая контур A , то, вообще говоря, не существует такого многообразия W с краем A , чтобы поверхность X_0 имела вид $X_0 = f(W)$. Другими словами, поверхность X_0 может не допускать непрерывной параметризации многообразием. Подробности см. в [7*]—[9*].

Вернемся теперь к классическому пониманию задачи Плато в классе поверхностей — пленок, параметризованных многообразиями. Мы изучим поведение таких пленок во всех размерностях, а не только в максимальной. Для реализации этой программы нужен язык более гибкий, чем язык обычных гомологий. В связи с этим напомним некоторые определения, использующиеся при создании такого языка. Пусть $Y \supset Z$ — пара топологических компактных пространств.

Определение 5. Ориентированным ($k-1$)-мерным сингулярным многообразием пары (Y, Z) назовем пару (V^{k-1}, f) , где V^{k-1} — компактное ориентированное многообразие с краем ∂V , а f — непрерывное отображение $(V, \partial V) \rightarrow (Y, Z)$, т. е. $f(V) \subset Y$, $f(\partial V) \subset Z$. Если $Z = \emptyset$, то полагаем $\partial V = \emptyset$. Сингулярное многообразие (V, f) называется бордантным нулю (эквивалентным нулю), если существуют компактное ориентированное многообразие W^k и непрерывное отображение $F: W \rightarrow Y$ такие, что: а) многообразие V является регулярным подмногообразием края ∂W и б) ориентация V совпадает с ориентацией, индуцированной на нем ориентацией W , причем $F|_V = f$, $F(\partial W \setminus V) \subset Z$.

Операция несвязного объединения многообразий индуцирует операцию несвязного объединения сингулярных многообразий. Два сингулярных многообразия (V_1, f_1) и (V_2, f_2) называются бордантными, если их несвязное объединение $(V_1 \cup V_2, f_1 \cup f_2)$ бордантно нулю.

Множество классов бордизмов ($k-1$)-мерных сингулярных ориентированных многообразий пары (Y, Z) образует абелеву группу $\Omega_{k-1}(Y, Z)$. При отказе от условия ориентируемости аналогичная конструкция приводит к группам $N_{k-1}(Y, Z)$ неориентированных бордизмов. Описанные выше задачи 1 и 2 могут быть теперь переформулированы так. Пусть A^{k-1} — компактное замкнутое ориентированное подмногообразие в M и $i: A \rightarrow X$ — вложение, где X — поверхность в M .

Задача 1. Можно ли среди поверхностей X , содержащих A и таких, что сингулярный бордизм (A, i) эквивалентен нулю в X , найти такую поверхность X_0 , которая обладала бы свойствами минимальности?

Тождественное отображение $e: A \rightarrow A$ определяет элемент $\sigma \in \Omega_{k-1}(A)$. Ясно, что введенный выше класс поверхностей X характеризуется тем, что $i_*\sigma = 0$, где $i_*: \Omega_{k-1}(A) \rightarrow \Omega_{k-1}(X)$ — гомоморфизм, индуцированный вложением $i: A \rightarrow X$.

Задача 2. Можно ли среди всех сингулярных многообразий (V, g) , $g: V \rightarrow M$, бордантных (эквивалентных) данному сингулярному многообразию (V', g') , $g': V' \rightarrow M$, найти такое сингулярное многообразие (V_0, g_0) , чтобы поверхность $X_0 = g_0(V_0)$ обладала свойствами минимальности?

Наряду с группами Ω_{k-1} и N_{k-1} мы будем использовать группы Ω_{k-1}^* сингулярных бордизмов по модулю p . Группы Ω_* , N_* , Ω_* удовлетворяют шести (из семи) аксиомам Стинрода—Эйленберга, т. е. являются экстраординарными, обобщенными теориями гомологий. Но, в отличие от обычной теории гомологий, группы бордизмов точки, вообще говоря, нетривиальны в положительных размерностях. В этом — существенное отличие от обычной теории гомологий, поскольку обычные гомологии точки равны нулю во всех размерностях кроме нулевой.

Поскольку минимальные поверхности обладают, вообще говоря, особенностями (и эти особенности могут быть чрезвычайно сложны), то для использования теории бордизмов в вариационных задачах потребовалось расширить область определения этой теории с класса клеточных комплексов на класс поверхностей (т. е. измеримых компактов в римановом многообразии). Этот процесс аналогичен построению спектральных гомологий в случае обычной теории гомологий.

В дальнейшем, говоря о бордизмах поверхностей, мы будем постоянно иметь в виду именно спектральные бордизмы. Так как группы N_* и Ω_* являются компактными группами (в случае конечных клеточных комплексов), то их распространение на класс поверхностей не встречает препятствий. С теорией бордизмов Ω_* нужно поступить более осторожно, а именно, следует рассмотреть группы $\Omega_* = \Omega_* \otimes_{\mathbb{Z}} Q_p$, где Q_p — группа целых p -адических чисел. Подробности см. в [11*].

III. Формулировка теоремы существования глобально минимальных поверхностей, реализующих абсолютный минимум функционала многомерного объема.

Пусть M — компактное гладкое замкнутое риманово многообразие, A — одна из перечисленных выше теорий бордизмов, A — фиксированная поверхность — контур в многообразии M . Рассмотрим класс поверхностей X в многообразии M , определенный выше в задачах 1 и 2. Этот класс назовем вариационным и обозначим через B . В случае задачи 1 поверхности из класса

заключают контур A в смысле бордизмов; в случае задачи 2 поверхности из класса B реализуют некоторый нетривиальный элемент группы бордизмов многообразия M . Тогда в каждом таком вариационном классе возникает задача нахождения минимальной поверхности. Для каждой поверхности X из класса B построим ее стратификацию $X = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \dots$, где S^k — максимальное подмножество в множестве $X \setminus A$, имеющее в каждой своей точке размерность k ; затем S^{k-1} — максимальное подмножество в $X \setminus A \setminus S^k$, имеющее в каждой своей точке размерность $k-1$, и т. д. (см. [7*], [8*], [11*]). Подмножества S^i мы назовем стратами. Если они измеримы, то определен стратифицированный объем $SV(X) = (\text{vol}_k S^k, \text{vol}_{k-1} S^{k-1}, \dots)$, изображаемый вектором с k координатами. Варьируя поверхность X в классе допустимых вариаций, т. е. оставаясь все время в вариационном классе B , мы изменяем вектор стратифицированного объема поверхности. Задача заключается в нахождении поверхности с наименьшим стратифицированным объемом в заданном классе B . Наименьший вектор объема $SV_B = (d_k, d_{k-1}, \dots)$ мы понимаем в следующем лексикографическом смысле. Сначала минимизируем первую координату $SV(X)$, т. е. ищем в классе B поверхность X_k , для которой выполнялось бы равенство:

$$\text{vol}_k S^k = \text{vol}_k X \setminus A = d_k = \inf_{Y \in B} \text{vol} Y \setminus A.$$

Если такие поверхности X_k существуют, то приступим к минимизации второй координаты вектора объема $SV(X)$. Для этого будем искать в классе поверхностей X_k с уже минимальной первой координатой (т. е. таких, что $\text{vol}_k X \setminus A = d_k$) такую поверхность X_{k-1} , для которой

$$\text{vol}_{k-1} X_{k-1} \setminus A \setminus S^k = d_{k-1} = \inf_{\{X_k\}} \text{vol}_{k-1} X_k \setminus A \setminus S^k.$$

Эта поверхность имеет минимальными уже две первые координаты вектора объема. И так далее. Каждый раз мы минимизируем следующую координату стратифицированного объема при условии, что все предыдущие его координаты уже минимизированы и фиксированы. Если этот процесс корректно определен (а именно это и утверждается теоремой существования, см. ниже), то тогда он завершится на некоторой поверхности, стратифицированный объем которой уже глобально минимален в классе всех стратифицированных поверхностей из данного вариационного класса B . Числа $d_i = d_i(B)$ зависят, конечно, от класса B . Центральным моментом этой постановки и решения задачи Плато в терминах бордизмов является введение автором настоящего Приложения понятия стратифицированного объема и разработка методов его минимиза-

ции во всех размерностях (см. [7*]—[9*], [11*]). В частности, дальнейшее развитие этой идеи позволило затем доказать существование глобально минимальных поверхностей в каждом гомотопическом классе (см. [12*] Дао Чонг Тхи).

Теорема 1 (основная теорема; см. [7*]—[9*], [11*]). Пусть M^n — компактное гладкое замкнутое многообразие такое, что $\pi_1(M) = \pi_n(M) = 0$, где $\pi_i(M)$ — гомотопические группы M и $A \subset M$ — фиксированный контур — поверхность. Рассмотрим произвольный непустой вариационный класс B , определенный с помощью бордизмов (см. выше). Тогда в классе B всегда существует глобально минимальная поверхность X_0 , стратифицированной объем которой $SV(X_0) = (d_k, d_{k-1}, \dots) = SV_B$ является наименьшим. Эта поверхность имеет однозначно определенную стратификацию (т. е. разбиение на страты) $X_0 = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \dots$, где каждое подмножество S^i является, за исключением, быть может, множества i -мерной меры нуль, состоящего из особых точек, гладким минимальным i -мерным подмногообразием в многообразии M (т. е. средняя кривизна равна нулю). При этом $d_i = \text{vol}_i S^i$.

Следствие 1. Пусть выполнены предположения теоремы 1 и B — вариационный класс из задач 1 и 2 (см. выше). Тогда в этом классе существует глобально минимальная поверхность (быть может, с особенностями, заполняющими множество меры нуль в каждом страте), являющаяся решением задачи Плато: а) в случае задачи 1 эта поверхность минимальна среди всех поверхностей, заклеивающих контур A в смысле бордизмов, т. е. допускающих непрерывную параметризацию с помощью серии многообразий с краем A ; б) в случае задачи 2 эта поверхность минимальна среди всех поверхностей, реализующих данный элемент группы бордизмов объемлющего многообразия.

Эти результаты являются в действительности следствиями из существенно более общей теоремы существования глобально минимальных поверхностей, доказанной в [7*], [8*], [11*] для случая так называемых экстраординарных (обобщенных) теорий (ко) гомологий. Мы не будем здесь на этом останавливаться, так как описание экстраординарных теорий потребовало бы привлечения дополнительного материала. Приведем здесь только один пример многомерной вариационной задачи, сформулированной в терминах экстраординарных когомологий.

Пусть на многообразии M задано стабильно нетривиальное векторное расслоение ξ . Рассмотрим вариационный класс всех поверхностей $X \subset M$ таких, что ограничение ξ на X по-прежнему стабильно нетривиально. Тогда среди таких поверхностей обязательно найдется глобально минимальная (в смысле стратифицированного объема).

Выше мы рассматривали две отдельные задачи: заклейки контура и реализации циклов. Однако наиболее естественной является смешанная задача, в которой ищется минимальная поверхность,

одновременно закленывающая контур и реализующая некоторые циклы в объемлющем многообразии. Опишем вкратце решение этой смешанной задачи Плато.

Пусть h — одна из теорий бордизмов (см. выше) и пусть $L = \{L_p\}$ — фиксированный набор подгрупп $L_p \subset h_p(A)$, где p — целые числа. Пусть, далее, $L' = \{L'_q\}$ — фиксированный набор подгрупп $L'_q \subset h_q(M)$.

Определение 6. Через $B(A, L, L')$ обозначим класс всех поверхностей X в многообразии M таких, что: 1) $A \subset X \subset M$, 2) $L \subset \text{Ker } i_*$, 3) $L' \subset \text{Im } j_*$, где $i: A \rightarrow X$ и $j: X \rightarrow M$ — вложения.

Ясно, что классы $B(\emptyset, 0, L')$ и $B(A, L, 0)$ совпадают с вариационными классами B , введенными нами выше в задачах 1 и 2. Оказывается, в каждом из классов $B(A, L, L')$ всегда имеется глобально минимальная поверхность, стратифицированный объем которой является наименьшим в лексикографическом смысле.

Поскольку эта теорема (см. [7*], [8*], [11*]) утверждает существование поверхности, минимизирующей стратифицированный объем, составленный из последовательности объемов стратов поверхности, то мы сформулируем этот результат также в виде последовательности утверждений о минимальности этих стратов.

Пусть выполнены предположения теоремы 1 и пусть $B(A, L, L') = B$ — произвольный непустой вариационный класс, состоящий из поверхностей указанного топологического типа. Пусть k — наименьшее из целых чисел s , $s < n$, для которых $d_s = d_k$, (B) $< \infty$, $3 \leq k \leq n$. Тогда выполняются следующие последовательные утверждения.

1) Существуют поверхности, старший объем которых (т. е. объем vol_k) глобально минимален. Более точно, если $\{X\}_k$ — класс всех поверхностей X таких, что $X \in B$ и $\text{vol}_k X \setminus A = d_k = \inf_{Y \in B} \text{vol}_k Y \setminus A$, то мы утверждаем, что этот класс непуст и что

$d_k < \infty$. В том случае, когда $d_k > 0$, каждая поверхность X из вариационного класса $\{X\}_k$ содержит однозначно определенное k -мерное (т. е. имеющее размерность k в каждой своей точке) подмножество $S^k \subset X \setminus A$ такое, что $A \cup S^k$ — компакт в объемлющем многообразии. При этом k -мерный страт поверхности X , т. е. множество S^k содержит подмножество Z_k (возможно пустое), где $\text{vol}_k Z_k = 0$ и $S^k \setminus Z_k$ — гладкое k -мерное подмногообразие в M , без края и всюду плотное в S^k . Множество Z_k является множеством всех k -мерных сингулярных особых точек поверхности X . При этом $\text{vol}_k S^k = \text{vol}_k X \setminus A = d_k$. Если же $d_k = 0$, то положим $S^k = \emptyset$. В этом случае поверхность не имеет страта размерности k .

2) Существуют поверхности, у которых глобально минимальным является не только старший объем, но и следующий за ним объем на единицу меньшей размерности. Этот следующий объем подсчи-

тывается для страта соответствующей размерности, содержащегося в поверхности. Более точно, если $\{X\}_{k-1} \subset \{X\}_k$ есть класс всех таких поверхностей X , что $X \in B$, $\text{vol}_k X \setminus A = d_k$, т. е. $X \in \{X\}_k$ и, кроме того,

$$\text{vol}_{k-1} X \setminus A \setminus S^k = d_{k-1} = \inf_{Y \in \{X\}_k} \text{vol}_{k-1} Y \setminus A \setminus S^k,$$

то мы утверждаем, что этот класс $\{X\}_{k-1}$ непуст и $d_{k-1} < \infty$. В том случае, когда $d_{k-1} > 0$, каждая поверхность из этого класса содержит однозначно определенное $(k-1)$ -мерное подмножество $S^{k-1} \subset X \setminus A \setminus S^k$ такое, что $A \cup \bigcup S^k \cup S^{k-1}$ — компакт в объемлющем многообразии. Множество S^{k-1} содержит подмножество Z_{k-1} (возможно, пустое) меры нуль, т. е. $\text{vol}_{k-1} Z_{k-1} = 0$ и, кроме того, дополнение к Z_{k-1} в S^{k-1} , т. е. подмножество $S^{k-1} \setminus Z_{k-1}$ является гладким $(k-1)$ -мерным подмногообразием в объемлющем многообразии, не имеющим края и всюду плотным в S^{k-1} . При этом выполнено равенство $\text{vol}_{k-1} S^{k-1} = \text{vol}_{k-1} X \setminus A \setminus S^k = d_{k-1} > 0$. Если же $d_{k-1} = 0$, то положим $S^{k-1} = \emptyset$.

И так далее вниз по размерностям. На следующем шаге обнаруживается, что существуют поверхности, у которых минимальны не только два первых их объема (т. е. старший и следующий за ним по размерности вниз), но и третий объем размерности $k=2$, подсчитанный для соответствующего страта размерности $k=2$. Другими словами, каждый следующий объем оказывается минимальным при условии фиксации всех предыдущих минимальных объемов. Наконец, поверхности, составляющие класс $\{X\}_1$, являются уже глобально минимальными во всех размерностях, т. е. объемы всех их стратов минимальны. Более того, каждый страт S^i за исключением, быть может, множества особых точек меры нуль, является в действительности гладким минимальным подмногообразием размерности i .

В заключение сообщим о теореме существования глобально минимальных поверхностей в каждом гомотопическом классе. Введение нового понятия стратифицированного объема и разработанная в [7*], [8*], [11*] методика его минимизации позволили затем решить задачу Плато в каждом вариационном классе поверхностей, получающихся гомотопией какого-то фиксированного отображения $f: V \rightarrow M$. Оказывается, в каждом таком классе есть глобально минимальная поверхность (см. [12*]). При этом понятия стратифицированной поверхности и стратифицированного объема были реализованы на функциональном языке *вариофолов*, в терминах которого и получена теорема существования и почти всюду регулярности минимальных решений. Таким образом, в настоящий момент установлено не только существование абсолютных минимумов, но и относительных (в каждом гомотопическом классе).

ЛИТЕРАТУРА К ПРИЛОЖЕНИЮ 2

- 1*. Federer H. Geometric measure theory. — Berlin: Springer, 1969.
- 2*. Morrey Ch. B. Multiple integrals in the calculus of variations. — Berlin: Springer, 1966.
- 3*. Reinforcement E. R. Solution of the Plateau problem, for m -dimensional surfaces of varying topological type. — Acta Math., 1960, 104, N 1, p. 1—92.
- 4*. Almgren F. J. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological and singularity structure. — Ann. Math., Ser. 2, 1968, 87, N 2, p. 321—391.
- 5*. Оссерман Р. Минимальные поверхности. — УМН, 1967, 22, № 4.
- 6*. Osserman R. Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n . — Ann. Math., 1964, 89, N 2, p. 340—364.
- 7*. Фоменко А. Т. Многомерная задача Плато в римановых многообразиях. — Матем. сб., 1972, 89 (131), № 3, с. 475—520.
- 8*. Фоменко А. Т. Минимальные компакты в римановых многообразиях и гипотеза Раффенберга. — ИАН СССР, 1972, 38, № 5, с. 1049—1080.
- 9*. Фоменко А. Т. Многомерные вариационные методы в топологии экстремалей. — УМН, 1981, 36, № 6, с. 105—135.
- 10*. Фоменко А. Т. Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле. — ИАН СССР, 1971, 35, № 3, с. 667—681.
- 11*. Фоменко А. Т. Многомерные задачи Плато на римановых многообразиях и экстраординарные теории гомологий и когомологий. Часть I. — В кн.: Труды семинара по вект. и тенз. анализу, 17. М.: Изд. МГУ, 1974, с. 3—176; часть II — В кн.: Труды семинара по вект. и тенз. анализу, 18, М.: Изд. МГУ, 1978, с. 4—93.
- 12*. Дао Чонг Тхи. Мультивариофолды и классические многомерные задачи Плато. — ИАН СССР, 1980, 44, № 5, с. 1031—1065.
- 13*. Фоменко А. Т. О минимальных объемах топологических глобально минимальных поверхностей в кобордизмах. — ИАН СССР, 1981, 45, № 1, с. 187—212.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиомы теории гомологий 72
 Алгебра свободная косокоммутативная 81
 — Стингрода 125
 — Хопфа 81
- Барицентрическое подразделение 66
 Билинейные соотношения Римана 143
 Бордизм сингуляризм 277
 Бордизмы 76
 — неориентируемые 76
 Букет сфер 46
- Вполне геодезическое подмногообразие 237
 Вторая фундаментальная форма 330
 Вырезание 73
 Высечение 79
- Геодезическая вариация 216
 Голоморфный дифференциал 1:0
 Гомология (гомологии) комплекса симплексального 30
 — сингуляризм кубические 59
 — симплексиальные 57
 — комплекса цепей 22
 — с коэффициентами в группе 25
 — с коэффициентами в представлении 134
 — локальными коэффициентами 134
 Гомологий полная группа 22
 Гомологическое многообразие 296
 Гомоморфизм Бонштейна 31
 — комплексов 23
 Гомотопическая сфера 305
 Гомотопически эквивалентные многообразия 10
 Гомотопия алгебраическая 23
 Границы 22
 Группа бордизмов 277
 Групповое кольцо 133
 Группы кобордизмов классические, 278
- Двойственность Александера 191
 — Леффеша 190
 — Пуанкаре 74
 Диаграмма Хегора 239
- Задача Кирхгофа 317
 — Ковалевский 147
 — Неймана 150
 — обращения Якоби 146
 — Якоби (геодезические на эллипсоиде) 151
- Индекс замкнутой геодезической 233
 — критической точки 164
 — пересечения 188

- Категория Люстерника—Шнирельмана 19,
 Класс Понтрягина 105
 — Чижевская 104
 — Штифеля—Уитни 103
- Клеточное отображение 44
 — пространство 43
- Когомология комплекса цепей 22
 — цепей со значениями в группе 25
 — определенные через дифференциальные формы 7
 — с коэффициентами в пучке 159
- Когомологий полная группа 22
 К-гомологическая длина многообразия 201
 — операция 106
 — стабильная 107
 — частичная 106
- Кограница 22
 Комплекс алгебраический 22
 — дифференциальных форм 23
 — клеточный 43
 — л-связный 47
 — клеточных цепей 45
 — симплексиальный 39
 — сингуляризм цепей 57
 — Тома 284
- Эйлерова класс расслоения 102
 Эйлерова характеристика комплекса 24
- Трансгрессия 121
- Уравнения коммутативности 149
- h*-кобордизм 305
H-пространство 80
- Связная сумма 53
 Сигнатура 281
 Симплекс 28
 — сингуляризм 56
 Сингулярная плёнка 277
 Скобка Пуассона 318
 Соотношения Фробениуса 156
 Спектральная последовательность Лере 89
- Формула сигнатуры (Хирнебруха) 294
 Функционал Дирихле 252
 — многозначный 317
 — Монертюн—Ферма 316
 Функция высоты 183
- Характер Чижевская 117
 Характеристические классы стабильные 280
 — числа стабильные 279
 Ходжово многообразие 154
- Цикл 22
- Числа Бetti 30
- Экстрадординарная теория гомологий 73

Однако $D_\delta^{(1)}$ каноническим растяжением $E_i \xrightarrow{\delta^{-1}} E_i$ в δ^{-1} раз диффеоморфно $D_\delta^{(1)}$, причем размер U_i также увеличивается в δ^{-1} раз. Мы получаем, итерируя растяжение многократно:

$$\begin{array}{c} D_\delta^{(1)} = U_1 = D_\delta^{(1)} = U_{1,\delta^{-1}} = D_{\delta^{-1}}^{(1)} = U_{1,\delta^{-2}} = D_{\delta^{-2}}^{(1)} \dots \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ D_\delta^{(2)} = U_1 = D_\delta^{(2)} = U_{1,\delta^{-1}} = D_{\delta^{-1}}^{(2)} = U_{1,\delta^{-2}} = D_{\delta^{-2}}^{(2)} \dots \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

Так как $\bigcup_i U_{1,\delta^{-i}} = E_1 = \bigcup_j D_{\delta^{-j}}$, то распахающая последовательность диффеоморфизмов $F_{\delta^{-i}}^{(1)}: U_{1,\delta^{-i}} \rightarrow D_{\delta^{-i}}^{(2)}$ в пределе дает диффеоморфизм $E_1 \rightarrow E_2$. Теорема доказана.

Следствие 1. Комплексы Тома расслоений v_1^N, v_2^N над многообразиями M_1^N и M_2^N непрерывно гомеоморфны:

$$M(v_1^N) \approx M(v_2^N).$$

Доказательство очевидно.

Задача 5. Если $p = 3$, то все ориентируемые многообразия параллелизуемы (докажите!).

Следствие 2. Линзовые многообразия $L_p^3(q_j)$ ($j = 1, 2$), если они гомотопически эквивалентны (т. е. $q_1 = \lambda^2 q_2$, где q_1, q_2, λ — ненулевые вычеты modulo p , p простое) имеют диффеоморфные прямые произведения на \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ (см. § 11) $\mathbb{R}^6 \times L_p^3(q_1) = L_p^3(q_2) \times \mathbb{R}^6$, $q_1 = \lambda^2 q_2$.

Комплексы Тома тривиальных расслоений $M(v_1)$ и $M(v_2)$ гомеоморфны.

Важный факт (Милнор): в комплексе Тома $M(v)$ имеется особая точка $(*) \subset M(v)$, которая комбинаторно устроена (при симплициальном разбиении) как конус над границей «звезды» — пространством расслоения v_j со слоем S^{n-1} ; комбинаторные инварианты границы звезды являются инвариантами самого комплекса. Если сфера S^{n-1} четна, и расслоение v_j — прямое произведение, то кручение Райдемайстера имеет вид

$$R(L_p^3(q) \times S^{n-1}) = R(L_p^3(q)) \times \chi(S^{n-1}),$$

где χ — эйлерова характеристика (проверьте!). В частности, возможна ситуация, например, для $p = 7$:

$$R(L_p^3(q_1)) \times \chi(S^{n-1}) \neq R(L_p^3(q_2)) \times \chi(S^{n-1}),$$

где $\chi(S^{n-1}) = 2$. Поэтому комплексы Тома $M(v_1)$ и $M(v_2)$ комбинаторно не эквивалентны, хотя и гомеоморфны.

ЛИТЕРАТУРА

- Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
- Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1956.
- Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.
- Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
- Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969.
- Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Л.: Гостехиздат, 1948.
- Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — М.: Наука, 1971.
- Норден А. П. Теория поверхностей. — М.: Гостехиздат, 1956.
- Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1952.
- Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981.
- Зейферт Т., Трельфаль В. Топология. — М.; Л.: ГОНТИ, 1938.
- Зейферт Т., Трельфаль В. Вариационное исчисление в целом. — М.: ИЛ, 1947.
- Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.
- Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. — М.: Мир, 1971.
- Милнор Дж. Теорема об h -кобордизме. — М.: Мир, 1969.
- Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. — М.: Наука, 1976.
- Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973.
- Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.
- Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. — М.: ИЛ, 1960.
- Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. — М.: ИЛ, 1960.
- Чжень Шэн-шэнь. Комплексные многообразия. — М.: ИЛ, 1961.
- Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.
- Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.
- Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
- Стинрод Н. Топология косых произведений. — М.: ИЛ, 1953.
- Розендорн Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1971.
- Новиков С. П., Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Задачи по геометрии. — М.: Изд. МГУ, 1978.
- Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.

29. Роклин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
30. Лейфштейн С. Алгебраическая топология. — М.: ИЛ, 1949.
31. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.: Гостехиздат, 1953.
32. Хусциян Т. Теория гомотопий. — М.: Мир, 1964.
33. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. — М.: Мир, 1976.
34. Спенсер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.
35. Хилтон П., Уэйли С. Теория гомологий. — М.: Мир, 1966.
36. Милнор Дж., Стешеф Дж. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979. (См. также лекции Милнора в сб. переводов Математика, 3, № 4, с. 3—53; 9, № 4, с. 3—40.)
37. Стоунг Р. Заметки по теории кобордизмов. — М.: Мир, 1973.
38. Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1973.
39. Расслоенные пространства и их приложения: Сб. переводов. — М.: ИЛ, 1958.
40. Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмакер В. Л. Гомотопическая топология. — М.: Изд. МГУ, 1969.
41. Хьюзомлер Д. Расслоенные пространства. — М.: Мир, 1970.
42. Мошер Р., Тангора М. Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий. — М.: Мир, 1976.
43. Вейль А. Введение в теорию квадратных многообразий. — М.: ИЛ, 1961.
44. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Изд. МГУ, 1971.
45. Стинрод Н., Эпстейн Д. Когомологические операции. — М.: Наука, 1982.
46. Теория солитонов/Под ред. Новикова С. П. — М.: Наука, 1979.
47. Клиингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. — М.: Мир, 1982.
48. Гриффитс П., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1982.
49. Атья М. Лекции по К-теории. — М.: Мир, 1967.
50. Браудер У. Перестройки односвязных многообразий. — М.: Наука, 1983.
51. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982.
52. Тода М. Композиционные методы в теории гомотопий. — М.: Наука, 1982.
53. Adams J. F. Stable homotopy theory. — Berlin, Springer Verlag, 1966 (Lect. Notes, N 3).
54. Morse M. The calculus of variations in the large. — Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 18, N. Y., 1934.
55. Альбер С. И. О периодической задаче вариационного исчисления в целом. — УМН, 1957, 12, № 4, с. 57—124.
56. Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г. Топологические методы в вариационных задачах. — Труды научно-исследовательского института математики и механики. — М., 1930.
57. Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г. Применение топологии к экстремальным задачам. Труды 2-го Всесоюзного математического съезда, 1935, т. I, с. 224—237.
58. Новиков С. П. Гомотопически эквивалентные гладкие многообразия, I. — ИАН СССР, сер. матем., 1964, 28, с. 365—475.
59. Новиков С. П. О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях. — ИАН СССР, сер. матем., 1966, 30, с. 207—246.
60. Новиков С. П. Новые идеи в алгебраической топологии. — УМН, 1965, 20, № 3, с. 41—66.
61. Фоменко А. Т. Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле. — ИАН СССР, сер. матем., 1971, 35, с. 667—681.
62. Фоменко А. Т. Многомерная задача Плато в римановых многообразиях. — Матем. сб., 1972, 89, № 3, с. 475—520.

63. Милнор Дж. Кручение Уайтхеда. — Математика (сб. переводов), 1967, II, № 1, с. 3—42.
64. Милнор Дж. О многообразиях, гомеоморфных семимерной сфере. — Математика (сб. переводов), 1957, I, № 3, с. 35—42.
65. Мищенко А. С. Эрмитова К-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа. — УМН, 1976, 31, № 2, с. 69—134.
66. Бухштабер В. М., Мищенко А. С., Новиков С. П. Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии. — УМН, 1971, 26, № 2, с. 131—154.
67. Роклин В. А. Теория внутренних гомологий. — УМН, 1959, 14, № 4, с. 3—20.
68. Роклин В. А. 3-мерное многообразие — граница 4-мерного. — ДАН СССР, 1951, 81, № 3, с. 355—357.
69. Атья М. Ф. Пространства Тома. — Математика (сб. переводов), 1966, 10, № 5, с. 48—69.
70. Милнор Дж. Дифференциальная топология. — УМН, 1965, 20, № 6, с. 41—54.
71. Смейл С. О строении многообразий. — Математика (сб. переводов), 1964, 8, № 4, с. 95—108.
72. Смейл С. Топология и механика. — УМН, 1972, 27, № 2, с. 77—133.
73. Лекции на математическом семинаре по гомотопической топологии. — УМН, 1966, 21, № 5, с. 117—248.
74. Kervaire M. A. A manifold which does not admit any differentiable structure. — Comment. Math. Helv., 1960, 34, № 4, p. 257—270.
75. Kervaire M. A., Milnor J. Groups of homotopy spheres, I. — Ann. Math., 1963, 77, p. 504—537.
76. Milnor J. Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. — Ann. Math., 1961, 74, p. 575—590.
77. Serre J. P. Cohomology modulo 2 des complexes d'Eilenberg. — McLane. — Comment. Math. Helv., 1953, 27, p. 198—231.
78. Cartan H. Algèbres d'Eilenberg—McLane et homotopie. — Séminaire H. Cartan, Ecole Norm. Supér. (7e année), 1954/1955.
79. Milnor J. A survey of cobordism theory. Enseign. Math., 1962, 8, № 1—2, p. 16—23.
80. Novikov S. P. Pontrjagin classes, the fundamental groups and some problems of stable algebra. — Ess. on topology and rel. topics. Memories dedies a Georges de Rham. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1970.
81. Adams J. F. Stable homotopy and generalised homology. — Chicago Lect. Notes in Math., 1974.